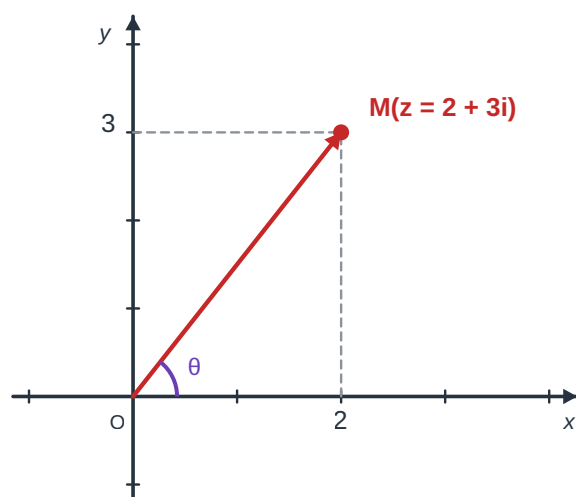


JE M'ÉCHAUFFE — Calcul mental

Echauffe-toi avant d'entrer dans le chapitre. Réponds de tête ; les réponses sont en bas.

1.	Donne $\cos \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{\pi}{6}$.	5.	Place sur le cercle trigonométrique les angles $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$.
2.	Développe $(a+b)^2$, $(a-b)^2$ et $(a+b)(a-b)$.	6.	Calcule $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})$.
3.	Résous dans $\mathbb{R}$: $x^2 = 9$; $x^2 = -9$.	7.	Donne une mesure principale de $\frac{7\pi}{3}$.
4.	Donne le discriminant de $x^2 - 2x + 5$.		

Corrigés : ** 1) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2$; 3) $x = \pm 3$, aucune solution réelle ; 4) $\Delta = 4 - 20 = -16$; 5) haut, gauche, bas du cercle ; 6) $4 - 3 = 1$; 7) $\frac{7\pi}{3}$.



Jusqu'à cette année, l'équation $x^2 = -1$ n'avait **aucune** solution : un carré ne peut pas être négatif. Cette impossibilité n'était pas un détail. Elle bloquait la résolution de familles entières d'équations, et elle rendait boiteuse la théorie du second degré, où un trinôme pouvait avoir deux racines, une seule, ou aucune, sans qu'on sache pourquoi ces trois cas devaient coexister.

Pourtant, au XVI^e siècle, en cherchant à résoudre des équations du troisième degré, des mathématiciens italiens osent écrire un « nombre » dont le carré vaut -1 . Le geste est audacieux : ils manipulent un objet

dont ils sont incapables de dire ce qu'il est, uniquement parce que les calculs, une fois le détour terminé, redonnent des solutions parfaitement réelles et vérifiables. Ce nombre, noté i , paraît d'abord *imaginaire*, et le mot est resté. Il ouvre pourtant un univers entièrement nouveau : les **nombres complexes**.

Ce que tu vas découvrir tient en une phrase : en ajoutant un seul nombre nouveau à $\mathbb{R}$, on obtient un ensemble où **toute** équation polynomiale a des solutions, et où les calculs algébriques deviennent des mouvements du plan. Un nombre complexe est en effet deux choses à la fois : un objet sur lequel on calcule, et un point que l'on peut placer sur une feuille. Les deux lectures s'éclairent l'une l'autre, et c'est ce va-et-vient qui fait la force du chapitre.

Dans ce chapitre, tu vas apprendre à **calculer** avec ces nombres, à les **représenter** comme des points du plan, à les écrire sous **trois formes** (algébrique, trigonométrique, exponentielle), et à t'en servir pour **résoudre des équations** et **transformer des expressions trigonométriques**. Tu découvriras aussi pourquoi multiplier par un complexe revient à **tourner** dans le plan : une idée qui resservira en géométrie et, plus tard dans l'année, pour les **équations différentielles**.

SOMMAIRE

Sommaire du chapitre :

- Leçon 1 : Forme algébrique et conjugué
- Leçon 2 : Représentation géométrique et module
- Leçon 3 : Argument, forme trigonométrique et exponentielle
- Leçon 4 : Formules de Moivre et d'Euler
- Leçon 5 : Equations dans $\mathbb{C}$
- Leçon 6 : Nombres complexes et géométrie du plan

UN PEU D'HISTOIRE

Vers 1545, en Italie, **Cardan** et **Bombelli** manipulent les premiers des racines carrées de nombres négatifs pour résoudre des équations de degré 3 : un détour par l'« impossible » qui, étrangement, redonne des solutions bien réelles. Bombelli est le premier à poser noir sur blanc les règles de calcul sur ces quantités, tout en avouant que la chose lui paraît « sophistiquée », c'est-à-dire tenir du tour de passe-passe.

Pendant deux siècles, ces nombres restent suspects. On s'en sert parce qu'ils marchent, on s'en méfie parce qu'on ne sait pas les définir. Descartes, en les baptisant « imaginaires », ne leur fait pas un compliment. Au XVIII^e siècle, **Euler** introduit la lettre i , calcule avec une virtuosité inégalée, et établit la relation devenue célèbre $e^{i\pi} + 1 = 0$, qui relie d'un trait 0, 1, i , π et e , c'est-à-dire l'arithmétique, la géométrie et l'analyse.

Le tournant décisif vient du dessin. Au début du XIX^e siècle, **Argand** et **Gauss** donnent enfin une **représentation géométrique** des complexes : chaque complexe devient un **point du plan**, l'addition devient une translation, la multiplication devient une rotation accompagnée d'un agrandissement. D'un coup, l'objet mystérieux devient visible, et le mot « imaginaire » perd son sens. Gauss proposera d'ailleurs, trop tard, de les rebaptiser « nombres latéraux ».

Dès lors, les nombres complexes cessent d'être des curiosités et deviennent un outil central des mathématiques, de la physique et de l'ingénierie. Les techniciens qui règlent un réseau électrique, ceux qui calculent la propagation d'une onde radio dans un émetteur, ou ceux qui traitent un signal numérique, écrivent tous des nombres complexes : la « quantité j » des schémas d'électricité n'est rien d'autre que notre i .

CE QUE TU DOIS DÉJÀ SAVOIR

Prérequis.

- **P1.** Donne $\cos \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{6}$, $\cos \frac{\pi}{4}$, $\cos \frac{\pi}{3}$.
- **P2.** Rappelle les formules d'addition de $\cos(a + b)$ et de $\sin(a + b)$.
- **P3.** Résous dans $\mathbb{R}$: $x^2 - 2x + 5 = 0$.
- **P4.** Dans un repère orthonormé, calcule la distance entre $A(1 ; 2)$ et $B(4 ; 6)$.

RAPPEL — Le cercle trigonométrique.

Pour un angle θ , le point du cercle de rayon 1 associé a pour coordonnées $(\cos \theta ; \sin \theta)$. On a $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, et les valeurs remarquables en $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ doivent être sues par cœur. Un angle est défini **modulo** 2π .

RAPPEL — Signes selon le quadrant.

Dans le premier quadrant, $\cos$ et $\sin$ sont positifs ; dans le deuxième, $\cos < 0$ et $\sin > 0$; dans le troisième, les deux sont négatifs ; dans le quatrième, $\cos > 0$ et $\sin < 0$. Connaître un seul des deux nombres ne suffit donc **jamais** pour déterminer un angle : il en faut deux.

RAPPEL — Equation du second degré dans $\mathbb{R}$.

Pour $ax^2 + bx + c = 0$, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta > 0$, deux solutions ; si $\Delta = 0$, une solution double ; si $\Delta < 0$, **aucune solution réelle**. C'est exactement ce manque que les complexes vont combler.

RAPPEL — Distance et milieu dans un repère orthonormé.

Pour $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$: $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$, et le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$. Ces deux formules vont être réécrites en une ligne grâce aux complexes.

RAPPEL — Identités remarquables.

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. La troisième sera l'outil qui permet de faire disparaître i d'un dénominateur : c'est elle qui rend possible la division dans $\mathbb{C}$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Savoir : le vocabulaire (partie réelle, partie imaginaire, conjugué, module, argument) ; les trois formes d'écriture d'un complexe ; les formules de Moivre et d'Euler ; les écritures complexes des transformations usuelles du plan (translation, symétries, rotation).

Savoir-faire théorique : démontrer les propriétés du conjugué et du module ; établir l'argument d'un produit ; justifier une interprétation géométrique d'une opération ; caractériser un alignement ou un angle droit à l'aide du quotient $\frac{c - a}{b - a}$.

Savoir-faire pratique : calculer dans $\mathbb{C}$; mettre un quotient sous forme algébrique ; passer d'une forme à l'autre ; placer le point d'affixe donnée ; résoudre une équation du second degré à coefficients réels ou complexes ; linéariser une expression trigonométrique ; déterminer l'image d'un point par une translation, une symétrie ou une rotation ; déterminer un ensemble de points (cercle, médiatrice, droite).

LECON 1 : Forme algébrique et conjugué

Activité de découverte — Le défi du lycée de Tenkodogo

Au lycée de Tenkodogo, le professeur écrit au tableau l'équation $x^2 + 1 = 0$ et demande à la classe de la résoudre. Aminata constate rapidement qu'aucun réel ne convient : un carré est toujours positif ou nul, il ne peut pas valoir -1 .

Le professeur propose alors une convention de travail. On **admet** l'existence d'un nombre, noté i , tel que $i^2 = -1$, et de nombres de la forme $a + bi$ (avec a et b réels) sur lesquels on calcule exactement comme sur les réels, en remplaçant i^2 par -1 chaque fois qu'il apparaît. Rien d'autre n'est autorisé : pas de règle nouvelle, pas de propriété supplémentaire.

a) Calcule $(a + bi) + (c + di)$ et range le résultat sous la forme « un réel plus un réel fois i ».

b) Calcule $(1 + i)(2 + i)$ en développant, puis en remplaçant i^2 par -1 .

c) Calcule $(1 + i)^2$. Le résultat comporte-t-il encore une partie sans i ?

d) Calcule $(2 + 3i)(2 - 3i)$. Que remarques-tu sur la nature du nombre obtenu ?

e) A l'aide de la question **d)**, essaie d'écrire $\frac{1}{2 + 3i}$ sous la forme $a + bi$.

(N'énonce pas encore de règle générale : observe.)

Ce que l'activité met en évidence

La question **a)** montre que l'addition ne pose aucun problème : on ajoute les parties sans i entre elles, les parties avec i entre elles, et le résultat reste de la même forme $a + bi$. Autrement dit, l'ensemble des nombres de cette forme est **stable** par addition. C'est déjà une bonne nouvelle : le nouvel ensemble ne « fuit » pas, on ne sort pas de la famille en additionnant.

La question **b)** montre la même chose pour la multiplication, mais avec un ingrédient supplémentaire. En développant, un terme en i^2 apparaît, et c'est la convention $i^2 = -1$ qui le renvoie parmi les nombres sans i . Sans cette convention, le calcul resterait bloqué ; avec elle, le produit se range encore sous la forme $a + bi$. Retiens le mécanisme, car c'est le seul de toute la leçon : **on développe comme d'habitude, puis on remplace i^2 par -1 .**

La question **d)** est la clé de la suite. Le produit $(2 + 3i)(2 - 3i)$ est de la forme $(a + bi)(a - bi)$, c'est-à-dire une identité remarquable $A^2 - B^2$ déguisée : les termes en i s'éliminent et il ne reste qu'un **réel positif**. Ce petit miracle de calcul a une conséquence énorme, explorée en **e)** : pour faire disparaître i d'un dénominateur, il suffit de multiplier en haut et en bas par ce partenaire privilégié. C'est ce partenaire que la leçon va nommer le **conjugué**.

La question **c)**, enfin, prépare une mise en garde. Le carré de $1 + i$ n'est pas ce qu'on attendrait naïvement : les nombres complexes ne se comportent pas comme des nombres « à deux étiquettes indépendantes ». Il faut calculer, chaque fois, avec la règle unique $i^2 = -1$.

La définition qui suit ne fait donc rien de plus que rendre officiel ce que tu viens de manipuler : un ensemble contenant $\mathbb{R}$, un élément i de carré -1 , une écriture unique $a + bi$, et un conjugué qui sert à diviser.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Définition. On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{C}$, contenant $\mathbb{R}$, muni d'une addition et d'une multiplication qui prolongent celles de $\mathbb{R}$, et d'un élément i tel que $i^2 = -1$. Tout nombre complexe z s'écrit de **façon unique** sous la **forme algébrique** $z = a + bi$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

- $a = \operatorname{Re}(z)$ est la **partie réelle**, $b = \operatorname{Im}(z)$ la **partie imaginaire** (ce sont des réels).
- Si $b = 0$, z est **réel** ; si $a = 0$ (et $b \neq 0$), z est un **imaginaire pur**.

Egalité de deux complexes (identification). L'unicité de l'écriture se traduit par :

$$a + bi = a' + b'i \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

En particulier, $a + bi = 0 \iff a = 0 \text{ et } b = 0$.

(On dit que $\mathbb{C}$ est un **corps** : on peut additionner, soustraire, multiplier, et diviser par tout complexe non nul. Conformément au programme, aucune construction de $\mathbb{C}$ n'est exigible : son existence est admise.)

Cette définition demande deux lectures. La première est modeste : $\mathbb{C}$ n'est pas un monde exotique, c'est $\mathbb{R}$ auquel on a ajouté **un seul** élément nouveau, i , et tout le reste suit par les règles de calcul habituelles. La seconde lecture porte sur le mot **unique**, qui est le mot le plus utile de l'encadré. Il dit qu'un complexe ne peut pas s'écrire de deux façons différentes sous la forme $a + bi$, et c'est cela qui autorise l'**identification** : dès qu'une égalité entre deux complexes est établie, on peut la couper en deux égalités entre réels. Presque tous les exercices où l'on cherche des inconnues réelles x et y reposent sur ce seul principe. Attention aussi à un piège de vocabulaire : la partie imaginaire de $z = 3 - 5i$ est le réel -5 , et non $-5i$. Le mot « partie » désigne un **coefficient**, pas un morceau d'écriture.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Opérations dans $\mathbb{C}$. Pour $z = a + bi$ et $z' = c + di$:

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + c) + (b + d)i, & z - z' &= (a - c) + (b - d)i, \\ z z' &= (ac - bd) + (ad + bc)i. \end{aligned}$$

On n'apprend pas la formule du produit par cœur : on **développe** puis on remplace i^2 par -1 .

Puissances de i . $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, puis tout se répète de 4 en 4.

Les deux premières lignes sont sans surprise : additionner deux complexes, c'est additionner séparément les parties réelles et les parties imaginaires, exactement comme on additionne deux vecteurs coordonnée par coordonnée. La troisième ligne est différente : les parties se **mélangent**, parce que le produit d'un terme en i par un autre terme en i retombe dans les réels. C'est cette différence de comportement entre addition et multiplication qui donnera, à la leçon 3, deux interprétations géométriques très différentes.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Conjugué. Le **conjugué** de $z = a + bi$ est $\bar{z} = a - bi$. Pour tous z, z' :

$$\overline{\bar{z}} = z, \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}', \quad \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z}', \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0).$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z), \quad z \bar{z} = a^2 + b^2 \text{ (réel } \geq 0 \text{)}.$$

De plus : z est **réel** $\iff \bar{z} = z$; z est **imaginaire pur** $\iff \bar{z} = -z$.

La propriété décisive est la dernière de la deuxième ligne : $z \bar{z} = a^2 + b^2$ est un **réel positif**. Elle explique tout le rôle du conjugué. Multiplier un complexe par son conjugué, c'est le transformer en réel, donc en un nombre par lequel on sait diviser. Les autres égalités se retiennent par leur signification : conjuguer deux fois ramène au point de départ, et conjuguer est compatible avec les quatre opérations, ce qui permet de conjuguer une expression entière d'un seul geste.

Les deux caractérisations de la troisième ligne sont, elles, des outils de démonstration très employés. Pour prouver qu'un nombre est réel sans le calculer, il suffit de montrer qu'il est égal à son conjugué ; pour prouver qu'il est imaginaire pur, qu'il est égal à l'opposé de son conjugué. Cette stratégie évite souvent des calculs de forme algébrique très lourds.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Inverse et quotient. Pour tout complexe $z = a + bi$ **non nul** :

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i.$$

Plus généralement, pour mettre $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique ($z' \neq 0$), on multiplie le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}'$:

$$\frac{z}{z'} = \frac{z \bar{z}'}{z' \bar{z}'} = \frac{z \bar{z}'}{c^2 + d^2}.$$

Le dénominateur $c^2 + d^2$ est un réel **strictement positif** dès que $z' \neq 0$, ce qui garantit que l'opération est toujours licite. On retrouve ici l'écho exact d'une technique de seconde : rendre rationnel un dénominateur en multipliant par l'expression conjuguée, comme on écrit $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3}$. La méthode est identique, seul le rôle de $\sqrt{3}$ est tenu par i .

ATTENTION !

On a $i^2 = -1$, donc $i^3 = -i$ et $i^4 = 1$. Mais on **n'écrit jamais** $i = \sqrt{-1}$: la règle $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ est **fausse** pour les nombres négatifs. Si on l'utilisait, on obtiendrait $-1 = i^2 = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = \sqrt{1} = 1$, ce qui est absurde. Le symbole $\sqrt{}$ reste réservé aux réels positifs ; on écrit i , et rien d'autre. De même, il n'y a **pas d'ordre** dans $\mathbb{C}$: écrire $i > 0$ ou $z < z'$ n'a aucun sens pour des complexes non réels.

MÉTHODE : METTRE UN QUOTIENT SOUS FORME ALGÈBRE

Étape 1 : Repère le dénominateur $z' = c + di$ et écris son conjugué $\overline{z'} = c - di$.

Étape 2 : Multiplie le numérateur **et** le dénominateur par $\overline{z'}$: la valeur du quotient ne change pas, puisque tu multiplies par 1 déguisé.

Étape 3 : Calcule le dénominateur avec l'identité remarquable : $z' \overline{z'} = c^2 + d^2$, un **réel** strictement positif.

Étape 4 : Développe le numérateur en remplaçant i^2 par -1 .

Étape 5 : Sépare enfin la partie réelle et la partie imaginaire, en écrivant le résultat sous la forme

$$\frac{\alpha}{c^2 + d^2} + \frac{\beta}{c^2 + d^2} i.$$

Étape 6 : Vérifie : multiplie le résultat par le dénominateur de départ, tu dois retrouver le numérateur.

Exemple résolu 1 : produit, puis quotient

Enoncé. Mets sous forme algébrique $A = (2 + 3i)(1 - i)$ et $B = \frac{1}{1 + i}$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On développe le produit comme on développerait $(2 + 3x)(1 - x)$, sans se préoccuper pour l'instant de la nature de i .	$A = 2 - 2i + 3i - 3i^2$.
Le terme $-3i^2$ est le seul point nouveau : on y remplace i^2 par -1 , ce qui le transforme en $+3$, un nombre réel.	$A = 2 + i + 3 = 5 + i$.
Pour le quotient, on ne peut pas laisser i au dénominateur. On multiplie donc en haut et en bas par le conjugué $1 - i$, ce qui ne change pas la valeur.	$B = \frac{1 \times (1 - i)}{(1 + i)(1 - i)}$.
Le dénominateur devient un réel grâce à l'identité $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, ici $1^2 - i^2 = 1 + 1$.	$(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 2$.
Il ne reste qu'à séparer la partie réelle et la partie imaginaire.	$B = \frac{1 - i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

Vérification. On multiplie le résultat par le dénominateur de départ :

$(1 + i) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. On retrouve bien le numérateur 1, donc le quotient est juste.

Exemple résolu 2 : un quotient à numérateur complexe

Enoncé. Mets $C = \frac{3 + 2i}{1 - i}$ sous forme algébrique, puis donne $\text{Re}(C)$ et $\text{Im}(C)$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Le dénominateur est $1 - i$; son conjugué s'obtient en changeant le signe de la partie imaginaire, donc c'est $1 + i$.	$\overline{1 - i} = 1 + i.$
On multiplie haut et bas par ce conjugué. Le dénominateur devient $1^2 + (-1)^2$, c'est-à-dire 2.	$C = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{2}.$
On développe le numérateur : $3 + 3i + 2i + 2i^2$, et le terme $2i^2$ vaut -2 .	$(3 + 2i)(1 + i) = 1 + 5i.$
On sépare les deux parties en divisant chaque terme par 2.	$C = \frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$
On lit alors directement les deux coefficients réels demandés.	$\operatorname{Re}(C) = \frac{1}{2}$ et $\operatorname{Im}(C) = \frac{5}{2}.$

Vérification. $(1 - i) \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i \right) = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i - \frac{1}{2}i - \frac{5}{2}i^2 = \frac{1}{2} + 2i + \frac{5}{2} = 3 + 2i.$ Le numérateur de départ est bien retrouvé.

Exemple résolu 3 : trouver deux réels par identification

Enoncé. Détermine les réels x et y tels que $(x + iy)(1 + i) = 3 - i.$

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On développe le membre de gauche en traitant x et y comme des nombres réels quelconques, puis on remplace i^2 par -1 .	$(x + iy)(1 + i) = x + xi + yi - y.$
On range le résultat sous la forme « réel plus réel fois i » : c'est indispensable avant toute identification.	$(x - y) + (x + y)i = 3 - i.$
Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles sont égales et leurs parties imaginaires aussi : l'égalité complexe se coupe en deux équations réelles.	$x - y = 3$ et $x + y = -1.$
On résout ce système par addition puis soustraction des deux lignes.	$2x = 2$ donc $x = 1$, puis $y = x - 3 = -2.$

Vérification. Avec $x = 1$ et $y = -2$: $(1 - 2i)(1 + i) = 1 + i - 2i - 2i^2 = 1 - i + 2 = 3 - i.$ Le couple trouvé convient, et c'est le seul, puisque le système était de solution unique.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). On travaille dans $\mathbb{C}$, avec le seul nombre i vérifiant $i^2 = -1$, et n désigne un entier naturel quelconque, éventuellement très grand.

Outil (la propriété que j'utilise). Le calcul direct des premières puissances, et la division euclidienne de n par 4 : tout entier n s'écrit $n = 4q + r$ avec $r \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Conclusion (ce que j'en déduis). Les premières puissances valent $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \times i = -i$, puis $i^4 = i^2 \times i^2 = (-1) \times (-1) = 1$. On est revenu à 1, donc tout va se répéter. Écrivons $n = 4q + r$: alors

$$i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \times i^r = 1^q \times i^r = i^r.$$

La puissance i^n ne dépend donc que du **reste** r de n dans la division par 4, et elle ne peut prendre que les quatre valeurs 1, i , -1 , $-i$. Par exemple $2026 = 4 \times 506 + 2$, donc $i^{2026} = i^2 = -1$.

Rédaction type. « On sait que $i^4 = 1$ (propriété calculée). Or $2026 = 4 \times 506 + 2$ (division euclidienne). Donc $i^{2026} = (i^4)^{506} \times i^2 = 1 \times (-1) = -1$. »

Quel type de raisonnement ? C'est une **conjecture puis preuve** : on calcule quelques cas, on observe une périodicité, puis on la **démontre** au lieu de se contenter de l'observer. La démonstration repose sur une déduction directe à partir de la division euclidienne. Remarque bien que le calcul de trois ou quatre cas ne prouve rien à lui seul : c'est l'écriture $n = 4q + r$ qui transforme une observation en certitude.

ATTENTION !

Ne confonds pas $\text{Im}(z)$ et la partie imaginaire écrite avec son i . Pour $z = 4 - 7i$, on a $\text{Im}(z) = -7$, un **réel**, et non $-7i$. De même, $\text{Re}(z)$ et $\text{Im}(z)$ sont toujours des réels, même quand l'énoncé les note x et y . Enfin, dans un calcul du type $\text{Re}(zz')$, il est faux d'écrire $\text{Re}(z) \times \text{Re}(z')$: la partie réelle d'un produit n'est **pas** le produit des parties réelles, comme le montre $(1 + i)(1 + i) = 2i$, dont la partie réelle est 0 alors que $1 \times 1 = 1$.

À TOI DE JOUER !

Exercice 1. Mets sous forme algébrique : **a)** $(3 - 2i) + (1 + 5i)$; **b)** $(2 + i)(3 - i)$.

Exercice 2. Mets $\frac{3 + 2i}{1 - i}$ sous forme algébrique, puis donne sa partie réelle et sa partie imaginaire.

LECON 2 : Représentation géométrique et module

Activité de découverte — Le plan du marché de Dédougou

Le service technique de la commune de Dédougou a dessiné le plan du marché dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, l'unité valant 10 mètres. Chaque hangar est repéré par ses deux coordonnées. Un stagiaire remarque qu'un couple de coordonnées $(a; b)$ peut aussi se lire comme un nombre complexe $z = a + bi$, et il décide d'écrire le plan du marché avec des complexes.

- a) Place les points d'affixes $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 3$ et $z_4 = 2i$.
- b) Où se trouvent tous les points dont l'affixe est un nombre **réel** ? Et ceux dont l'affixe est un **imaginaire pur** ?
- c) Place le point d'affixe $\bar{z}_1$. Quelle est sa position par rapport au point d'affixe z_1 ?
- d) Calcule la longueur OM_1 , où M_1 est le point d'affixe z_1 . Compare-la au nombre $\sqrt{2^2 + 3^2}$.
- e) Le hangar A a pour affixe $2 + 3i$ et le hangar B pour affixe $6 + 6i$. Calcule $z_B - z_A$, puis la distance AB . Que remarques-tu ?

Ce que l'activité met en évidence

La première idée est un simple changement de regard, mais il change tout : un couple de coordonnées et un nombre complexe, c'est **la même information écrite deux fois**. A chaque complexe $z = a + bi$ correspond un unique point $M(a; b)$, et réciproquement. Cette correspondance parfaite, sans perte et sans ambiguïté, autorise à parler indifféremment du « nombre » z ou du « point » M . Le vocabulaire officiel le dit : M est **l'image** de z , et z est **l'affixe** de M .

La question **b)** montre que $\mathbb{R}$ n'a pas disparu dans $\mathbb{C}$: il y occupe une place précise, l'axe horizontal, qu'on appellera pour cette raison **l'axe des réels**. Les imaginaires purs, eux, occupent l'axe vertical. Les complexes qui ne sont ni réels ni imaginaires purs remplissent tout le reste du plan, ce qui donne une image très concrète de ce que « agrandir $\mathbb{R}$ » veut dire : on est passé d'une droite à un plan.

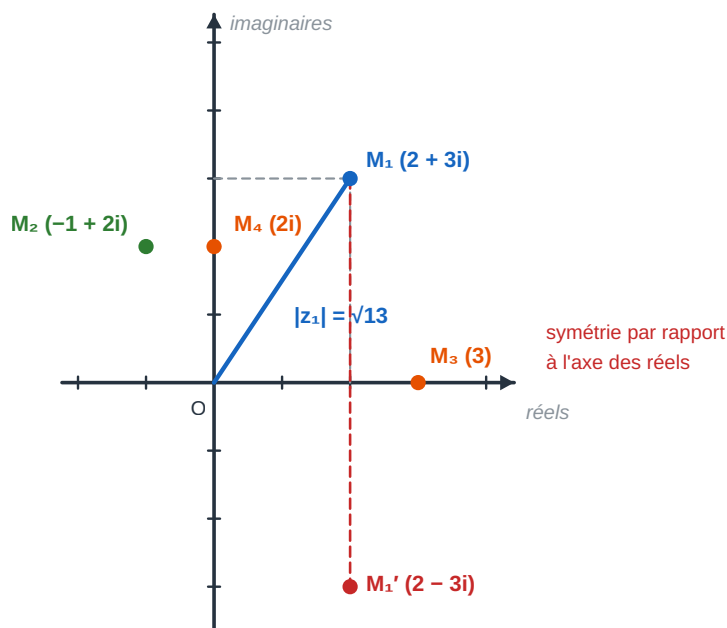
La question **c)** fait apparaître la première traduction géométrique d'une opération algébrique. Passer de z à $\bar{z}$ revient à changer le signe de l'ordonnée sans toucher à l'abscisse : les deux points sont **symétriques par rapport à l'axe des réels**. Une opération de calcul est donc devenue un mouvement du plan, et c'est la première d'une longue série.

Les questions **d)** et **e)** dessinent la notion centrale de la leçon. Le nombre $\sqrt{a^2 + b^2}$ n'est pas une expression arbitraire : c'est la longueur OM donnée par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle de côtés $|a|$ et $|b|$. Ce nombre mesure donc la « taille » du complexe, ce qu'on appellera son **module**. Et comme $z_B - z_A$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le module de cette différence donne directement la distance AB . En une seule formule, on récupère toute la géométrie métrique du plan.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Affixe d'un point, affixe d'un vecteur. Le plan est muni d'un repère orthonormé **direct** $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Au complexe $z = a + bi$ on associe le point $M(a; b)$, appelé **image** de z ; réciproquement, z est **l'affixe** de M , et l'on note souvent $M(z)$.

- Les **réels** sont les affixes des points de **l'axe des réels** $(O, \vec{u})$; les **imaginaires purs** sont les affixes des points de **l'axe des imaginaires** $(O, \vec{v})$.
- Le **vecteur** $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$; le vecteur $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe z_M .
- Le point d'affixe $\bar{z}$ est le **symétrique** du point d'affixe z par rapport à l'axe des réels ; celui d'affixe $-z$ est le symétrique par rapport à O .
- Le **milieu** I de $[AB]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.



Les réels occupent l'axe horizontal, les imaginaires purs l'axe vertical.

Figure 2. Le plan complexe : quelques affixes, le conjugué et le module lu comme une longueur.

Cette correspondance mérite d'être prise au sérieux, car elle fonctionne dans les deux sens et c'est là tout son intérêt. Quand un problème de calcul devient difficile, on le regarde comme une figure ; quand une figure résiste, on l'écrit avec des complexes et on calcule. Le programme de Terminale utilise sans cesse ce va-et-vient, et la plupart des exercices de la leçon 6 ne sont rien d'autre que sa mise en pratique.

Note aussi l'égalité $\overrightarrow{z_{AB}} = z_B - z_A$, qui reprend exactement la règle des coordonnées d'un vecteur, « arrivée moins départ ». Elle explique pourquoi les affixes de vecteurs se comportent comme les vecteurs eux-mêmes : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ correspond à $(z_B - z_A) + (z_C - z_B) = z_C - z_A$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Module. Le **module** de $z = a + bi$ est le réel positif

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM.$$

On a $|z| \geq 0$, avec $|z| = 0 \iff z = 0$, et surtout $|z|^2 = z \bar{z}$.

Propriétés. Pour tous complexes z et z' , et tout entier naturel n :

$$|zz'| = |z||z'|, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad (z' \neq 0),$$

$$|\bar{z}| = |z|, \quad |-z| = |z|, \quad |z^n| = |z|^n,$$

et l'**inégalité triangulaire** $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

L'égalité $|z|^2 = z \bar{z}$ est celle qui sert le plus souvent en démonstration, car elle relie une quantité géométrique (une longueur au carré) à un produit algébrique. C'est elle, par exemple, qui donne d'un trait $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, et donc, lorsque $|z| = 1$, la relation très utile $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Les propriétés du produit et du quotient disent que le module se comporte comme une **valeur absolue** : il traverse les multiplications et les divisions sans difficulté. En revanche, il ne traverse pas les additions, et c'est le sens de l'inégalité triangulaire. Le nom de cette inégalité vient de la figure : dans un triangle, un côté est toujours plus court que la somme des deux autres. Il n'y a égalité que dans le cas dégénéré où les trois points sont alignés dans le bon ordre, c'est-à-dire lorsque z et z' « vont dans le même sens ».

CE QU'IL FAUT RETENIR

Distances, cercles et médiatrices. Pour deux points $A(z_A)$ et $B(z_B)$:

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Il en découle immédiatement deux ensembles de points fondamentaux, où M a pour affixe z :

- $|z - z_A| = R$ (avec $R > 0$) caractérise le **cercle** de centre A et de rayon R ;
- $|z - z_A| = |z - z_B|$ caractérise la **médiatrice** du segment $[AB]$.

Interprétation de $z \mapsto z + a$. Le point d'affixe $z + a$ est l'image du point $M(z)$ par la **translation** de vecteur d'affixe a : additionner un complexe fixe, c'est déplacer tout le plan en bloc, sans le tourner ni le déformer (voir Leçon 6).

Ces deux caractérisations ne sont pas des propriétés nouvelles à apprendre : ce sont les **définitions de collège** du cercle et de la médiatrice, réécrites avec la formule $AB = |z_B - z_A|$. Un cercle est l'ensemble des points situés à une distance donnée d'un point donné ; une médiatrice est l'ensemble des points équidistants de deux points donnés. Dès que tu vois un module dans un énoncé de recherche d'ensemble, commence donc par le **traduire en distance** : la figure apparaît presque toujours d'elle-même.

Un conseil de lecture pour éviter l'erreur la plus fréquente : $|z - 1 - i|$ doit se lire $|z - (1 + i)|$, c'est-à-dire la distance de M au point d'affixe $1 + i$, et non au point d'affixe $-1 - i$. Ecris systématiquement la parenthèse avant d'interpréter.

ATTENTION !

Le module **n'est pas** $|a| + |b|$: c'est $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ainsi $|2 + 3i| = \sqrt{13}$, et non 5. De même, $|z + z'|$ n'est en général **pas** égal à $|z| + |z'|$: on a seulement l'inégalité $\leq$. Un contre-exemple suffit à s'en convaincre : pour $z = 1$ et $z' = -1$, on a $|z + z'| = 0$ alors que $|z| + |z'| = 2$. Enfin, ne confonds pas $|z|$, qui est un réel positif, avec z lui-même : écrire « $|z| = 3 + 4i$ » n'a aucun sens.

MÉTHODE : CALCULER UN MODULE

Étape 1 : Si z est donné sous forme algébrique, identifie $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$, puis applique $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Les signes disparaissent au carré : $|3 - 4i|$ et $|3 + 4i|$ sont égaux.

Étape 2 : Si z est un **produit** ou un **quotient**, ne développe surtout pas : utilise $|zz'| = |z||z'|$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$. Le calcul est beaucoup plus court et beaucoup moins risqué.

Étape 3 : Si z est une **puissance**, utilise $|z^n| = |z|^n$: on n'a jamais besoin de développer $(1 + i)^{10}$ pour connaître son module.

Étape 4 : Pour une **distance**, écris d'abord $AB = |z_B - z_A|$, calcule la différence sous forme algébrique, puis prends le module.

Étape 5 : Contrôle final : un module est toujours un réel **positif**. S'il apparaît un i dans le résultat, c'est qu'il y a une erreur.

Exemple résolu 1 : modules, distance et triangle

Enoncé. On donne A , B et C d'affixes $z_A = 1 + i$, $z_B = 4 + 5i$ et $z_C = -2 + 4i$. Calcule $|z_A|$, puis les longueurs AB , BC et AC . Le triangle ABC est-il isocèle ?

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Le module de z_A s'obtient en appliquant la définition avec $a = 1$ et $b = 1$: c'est la distance de A à l'origine.	$ z_A = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
Pour la distance AB , on calcule d'abord l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire l'affixe d'arrivée moins l'affixe de départ.	$z_B - z_A = (4 + 5i) - (1 + i)$, soit $3 + 4i$.
On prend ensuite le module de cette différence, ce qui donne la longueur cherchée.	$AB = 3 + 4i = \sqrt{9 + 16} = 5$.
On procède exactement de même pour les deux autres côtés, sans changer l'ordre des soustractions à l'intérieur d'un même calcul.	$z_C - z_B = -6 - i$, donc $BC = \sqrt{36 + 1} = \sqrt{37}$.
Dernier côté.	$z_C - z_A = -3 + 3i$, donc $AC = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$.
On compare enfin les trois longueurs obtenues, en les rendant comparables sous forme approchée.	$AB = 5$, $BC \approx 6,08$, $AC \approx 4,24$: les trois sont différentes.

Interprétation. Le triangle ABC n'est **pas** isocèle, puisque ses trois côtés ont des longueurs deux à deux distinctes. Remarque que le calcul n'a exigé aucune figure : les complexes fournissent ici une méthode entièrement numérique pour trancher une question de forme. Une figure reste toutefois utile pour contrôler l'ordre de grandeur des résultats.

Exemple résolu 2 : produits, quotients et puissances

Enoncé. Calcule $|(2 + i)(1 - i)|$, $\left|\frac{1 + i}{2 - i}\right|$ et $|(1 + i)^{10}|$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Pour un produit, on n'a pas besoin de développer : le module d'un produit est le produit des modules. On calcule donc les deux modules séparément.	$ 2 + i = \sqrt{5}$ et $ 1 - i = \sqrt{2}$.
On multiplie les deux résultats et on regroupe sous une seule racine.	$ (2 + i)(1 - i) = \sqrt{5} \times \sqrt{2} = \sqrt{10}$.
Pour un quotient, même principe avec une division. On calcule les modules du numérateur et du dénominateur.	$ 1 + i = \sqrt{2}$ et $ 2 - i = \sqrt{5}$.
On divise, puis on rend le dénominateur rationnel en multipliant par $\sqrt{5}$.	$\left \frac{1 + i}{2 - i} \right = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, soit $\frac{\sqrt{10}}{5}$.
Pour une puissance, on utilise $ z^n = z ^n$: développer $(1 + i)^{10}$ serait une perte de temps considérable.	$ (1 + i)^{10} = (\sqrt{2})^{10} = 2^5 = 32$.

Vérification. Contrôlons le premier résultat par l'autre chemin. En développant, $(2 + i)(1 - i) = 2 - 2i + i + 1 = 3 - i$, dont le module vaut $\sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$. Les deux méthodes concordent, et la première a demandé deux fois moins d'écriture.

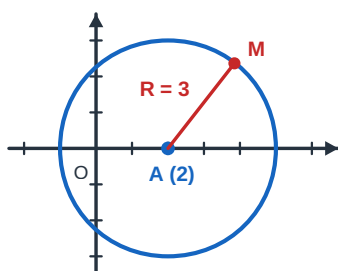
Exemple résolu 3 : reconnaître un ensemble de points

Enoncé. Détermine et décris l'ensemble des points M d'affixe z tels que : **1)** $|z - 2| = 3$; **2)**

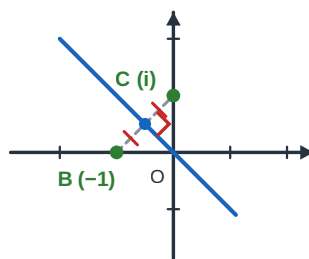
$$|z - i| = |z + 1|.$$

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On commence toujours par nommer les points fixes que l'énoncé cache derrière les écritures. Ici $z - 2$ fait apparaître le point d'affixe 2.	Soit A le point d'affixe 2.
Le module d'une différence est une distance : $ z - 2 $ n'est rien d'autre que la longueur AM .	$ z - 2 = AM$.
La condition devient donc une phrase de géométrie : le point M est à distance 3 du point fixe A .	$AM = 3$.
C'est exactement la définition du cercle de centre A et de rayon 3.	L'ensemble est le cercle de centre $A(2 ; 0)$ et de rayon 3.
Pour la seconde condition, on écrit $z + 1$ sous la forme $z - (-1)$ afin de faire apparaître le point fixe correspondant.	Soit B le point d'affixe -1 et C celui d'affixe i.
Les deux membres deviennent alors deux distances, et l'égalité dit que M est à égale distance de C et de B .	$CM = BM$.
C'est la définition de la médiatrice du segment joignant ces deux points.	L'ensemble est la médiatrice de $[BC]$.

Vérification. Pour la question **2)**, testons le milieu de $[BC]$, d'affixe $\frac{-1 + i}{2}$, qui doit appartenir à l'ensemble. On a $\left| \frac{-1 + i}{2} - i \right| = \left| \frac{-1 - i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\left| \frac{-1 + i}{2} + 1 \right| = \left| \frac{1 + i}{2} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Les deux distances sont bien égales : le milieu convient, comme l'exige la médiatrice.



$|z - 2| = 3$: cercle de centre A, de rayon 3



$|z - i| = |z + 1|$: médiatrice de [BC]

Figure 3. Deux ensembles de points classiques, lus directement sur les modules.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). z est un complexe quelconque, écrit sous forme algébrique $z = a + bi$ avec a et b réels.

Outil (la propriété que j'utilise). La définition du conjugué, $\bar{z} = a - bi$, l'identité remarquable $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$, et la définition du module, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Conclusion (ce que j'en déduis). Calculons le produit $z\bar{z}$ en reconnaissant l'identité remarquable, avec $A = a$ et $B = bi$:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2i^2 = a^2 + b^2.$$

Or $|z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$. Les deux quantités sont donc égales : $z\bar{z} = |z|^2$.

Cette égalité a trois conséquences immédiates, qu'il faut savoir mobiliser. D'abord, $z\bar{z}$ est toujours un réel **positif**, ce qui justifie la technique de division. Ensuite, pour $z \neq 0$, on obtient l'inverse sans calcul supplémentaire : $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Enfin, si $|z| = 1$, cette formule se simplifie en $\frac{1}{z} = \bar{z}$, ce qui rend les calculs sur le cercle de rayon 1 particulièrement légers.

Rédaction type. « On sait que $z = a + bi$ et $\bar{z} = a - bi$ (définition). Or le produit $(a + bi)(a - bi)$ vaut $a^2 + b^2$ par l'identité remarquable (propriété). Donc $z\bar{z} = |z|^2$, et en particulier $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ pour $z \neq 0$ (conclusion). »

Quel type de raisonnement ? Il s'agit d'une **déduction directe** : on part des définitions et on calcule sans hypothèse supplémentaire. Note toutefois la démarche qui suit la démonstration, et qui est au moins aussi importante : une fois l'égalité établie, on l'**exploite** en la relisant dans plusieurs situations particulières. Une propriété n'a de valeur que par les conséquences qu'on sait en tirer.

À TOI DE JOUER !

Exercice 3. Place dans un repère les points d'affixes $1 + i$, $-2 + i$, $-3i$, puis calcule leurs modules.

Exercice 4. A et B ont pour affixes $2 - i$ et $-1 + 3i$. Calcule la distance AB .

Activité de découverte — Le bras de la grue de Manga

Sur le chantier du nouveau lycée de Manga, une grue pivote autour d'un axe vertical. Le pied de la grue est pris pour origine O d'un repère orthonormé direct, l'unité valant un mètre, et la pointe du bras est repérée par son affixe. Au repos, la pointe se trouve au point M d'affixe $z = 1 + i$.

- a) Calcule $|z|$. Que représente ce nombre pour le conducteur de la grue ?
- b) Quel angle θ le vecteur $\overrightarrow{OM}$ fait-il avec l'axe des réels ? Justifie ta réponse en observant les coordonnées de M .
- c) Calcule $\cos \theta$ et $\sin \theta$, puis compare-les à $\frac{1}{|z|}$ et $\frac{1}{|z|}$.
- d) Vérifie que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.
- e) Le conducteur fait pivoter le bras d'un quart de tour dans le sens direct, sans changer sa longueur. Quelles sont les nouvelles coordonnées de la pointe ? Quel est son nouvel argument ? Et son module ?

Ce que l'activité met en évidence

Deux nombres suffisent à repérer un point du plan : c'est vrai des coordonnées $(a; b)$, mais c'est vrai aussi d'un autre couple, moins habituel et souvent plus commode. Pour le conducteur de la grue, ce qui compte n'est pas « deux mètres vers l'est et deux mètres vers le nord » : ce sont la **longueur du bras** et la **direction** dans laquelle il pointe. Ce couple, longueur et direction, est exactement ce que le module et l'argument vont formaliser.

La question **d)** montre comment passer d'un repérage à l'autre. Si le point est à distance r de l'origine dans la direction θ , alors ses coordonnées sont $r \cos \theta$ et $r \sin \theta$: c'est le cercle trigonométrique de première, agrandi d'un facteur r . En écrivant $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$, puis en mettant r en facteur, on obtient l'écriture $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, appelée **forme trigonométrique**.

La question **e)** est celle qui justifie tout le reste de la leçon. Faire pivoter le bras ne change pas sa longueur : le **module reste le même**. Cela ne change que la direction : l'**argument augmente** de l'angle du pivotement. Une rotation, c'est-à-dire un mouvement difficile à décrire en coordonnées, devient donc une simple addition sur les arguments. On pressent déjà que la nouvelle écriture va rendre faciles les opérations que la forme algébrique rendait pénibles.

Il faut enfin remarquer une différence de nature entre les deux nombres du nouveau couple. Le module est parfaitement déterminé : c'est une longueur, elle est unique. L'argument, lui, ne l'est pas : un quart de tour et un quart de tour plus un tour complet amènent la pointe au même endroit. L'argument sera donc défini **modulo** 2π , et le nombre 0, dont l'image est l'origine, n'aura tout simplement pas d'argument, puisqu'aucune direction ne lui correspond.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Argument (définition). Soit z un nombre complexe **non nul** et M son image dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On appelle **argument** de z , noté $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OM}\right)$. Si θ est un argument de z , les arguments de z sont exactement les réels $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) : l'argument est **défini modulo 2π** . Le nombre complexe 0 **n'a pas d'argument**.

En pratique, pour $z = a + bi \neq 0$ de module $r = |z|$, un argument θ de z est caractérisé par le **couple** d'égalités

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{b}{r}.$$

Il faut insister sur le mot **couple**. Une seule des deux égalités ne suffit jamais : $\cos \theta = \frac{1}{2}$ est vérifié aussi bien par $\frac{\pi}{3}$ que par $-\frac{\pi}{3}$, et seul le signe du sinus permet de choisir. C'est la source d'erreur numéro un du chapitre. Ecris donc toujours les deux lignes, puis conclus.

Remarque également que $\frac{a}{r}$ et $\frac{b}{r}$ sont les coordonnées du point du cercle **de rayon 1** situé dans la même direction que M : diviser par le module revient à ramener le point sur le cercle trigonométrique, où l'angle se lit directement. C'est pour cela qu'on calcule le module **avant** l'argument, et jamais l'inverse.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Forme trigonométrique et forme exponentielle. Tout complexe non nul z , de module $r = |z|$ et d'argument θ , s'écrit

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{forme trigonométrique}),$$

$$z = r e^{i\theta} \quad (\text{forme exponentielle}).$$

La notation $e^{i\theta}$ est une **abréviation** de $\cos \theta + i \sin \theta$; on a $|e^{i\theta}| = 1$ pour tout réel θ .

Egalité de deux complexes non nuls. $z = z' \iff |z| = |z'|$ et $\arg(z) = \arg(z') + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

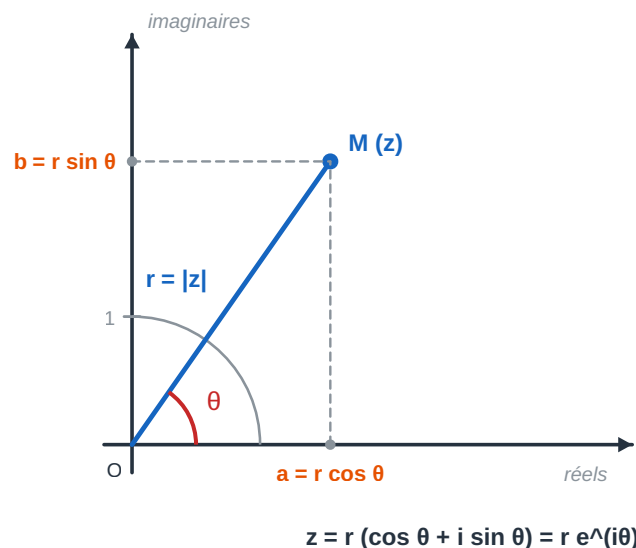


Figure 4. Module et argument : le même point lu en coordonnées, puis en longueur et direction.

Un contrôle simple permet de ne jamais se tromper de forme : dans une forme trigonométrique correcte, le module r est **positif**, il est mis **en facteur**, et l'intérieur de la parenthèse contient un $+$ entre le cosinus et le sinus, avec **le même angle** aux deux endroits. Une écriture comme $2(\cos \theta - i \sin \theta)$ n'est pas une forme trigonométrique : il faut d'abord la transformer, ici en $2(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$. De même,

$-3\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$ n'en est pas une, car le facteur est négatif ; on écrit alors $3\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}\right)$.

La forme exponentielle, elle, n'apporte aucune notion nouvelle : c'est la même chose, écrite plus court. Son intérêt est que la notation elle-même se souvient des règles de calcul, puisque $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ a exactement l'allure des règles sur les puissances déjà connues.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Propriétés des arguments. Pour z et z' non nuls, n entier naturel et $k \in \mathbb{Z}$:

$$\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi, \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi,$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi, \quad \arg(-z) = \arg(z) + \pi + 2k\pi, \quad \arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi.$$

En forme exponentielle, ces règles se lisent d'un coup d'œil :

$$r e^{i\theta} \times r' e^{i\theta'} = r r' e^{i(\theta+\theta')}, \quad \frac{r e^{i\theta}}{r' e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}, \quad \overline{r e^{i\theta}} = r e^{-i\theta}.$$

Toutes ces égalités se résument en une seule phrase, qu'il faut savoir dire : **on multiplie les modules et on additionne les arguments**. Le module et l'argument se partagent donc le travail, le premier gérant la taille, le second gérant la direction, sans jamais interférer. C'est l'exact contraire de ce qui se passe en forme algébrique, où le produit mélange les parties réelles et imaginaires.

La règle sur le conjugué se lit sur la figure : le symétrique par rapport à l'axe des réels garde la même distance à l'origine et voit son angle changé de signe. La règle $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$ se lit de même : passer à l'opposé revient à un demi-tour autour de O .

CE QU'IL FAUT RETENIR

Arguments remarquables et nature d'un complexe. Pour tout réel $r > 0$:

$$r = r e^{i \cdot 0}, \quad -r = r e^{i\pi}, \quad ri = r e^{i\pi/2}, \quad -ri = r e^{-i\pi/2}.$$

Il en résulte deux caractérisations, valables pour tout complexe **non nul** z et tout $k \in \mathbb{Z}$:

- z est **réel** $\iff \arg(z) = k\pi$;
- z est **imaginaire pur** $\iff \arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Ensemble de points associé à un argument. L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$ est la **demi-droite ouverte** d'origine O faisant l'angle α avec l'axe des réels (O exclu, car 0 n'a pas d'argument).

Remarque (notation). Certains livres abrègent « $+2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ » en « $[2\pi]$ » (lire : « modulo 2π »). Dans ce manuel, nous écrivons toujours les congruences avec $+2k\pi$.

Ces quatre écritures remarquables règlent tous les cas où le point est situé **sur un axe**, cas où l'on hésite souvent parce qu'aucun triangle ne se dessine. Retiens la logique plutôt que la liste : à droite sur l'axe horizontal, l'angle est nul ; à gauche, il vaut π ; en haut, $\frac{\pi}{2}$; en bas, $-\frac{\pi}{2}$. Ainsi -2 a pour module 2 et pour argument π , et $-3i$ a pour module 3 et pour argument $-\frac{\pi}{2}$.

La caractérisation des réels par $\arg(z) = k\pi$ mérite une lecture attentive : elle réunit les deux cas $\arg(z) = 0$ (réel positif) et $\arg(z) = \pi$ (réel négatif), qui correspondent aux deux demi-axes. De même, un imaginaire pur non nul est en haut ou en bas de l'axe vertical, d'où le $\frac{\pi}{2} + k\pi$.

ATTENTION !

L'argument n'existe **que pour** $z \neq 0$, et il est défini **modulo** 2π : $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} + 2\pi$ sont le même argument, il ne faut donc jamais parler de « l'argument » comme d'un nombre unique, mais d'« un argument ».

Vérifie toujours les **signes** de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$ pour placer θ dans le bon quadrant : $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

laisse le choix entre $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$, et seul le sinus tranche. Enfin, dans la formule

$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$, l'égalité est une égalité **modulo** 2π : le résultat obtenu peut sortir de l'intervalle $]-\pi ; \pi]$, et il faut alors lui ajouter ou retrancher 2π pour obtenir la mesure principale.

MÉTHODE : PASSER DE LA FORME ALGÈBRIQUE À LA FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Étape 1 : Vérifie d'abord que $z \neq 0$, sans quoi la question n'a pas de sens.

Étape 2 : Calcule $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, et écris-le sous forme simplifiée (par exemple 2 plutôt que $\sqrt{4}$).

Étape 3 : Calcule $\cos \theta = \frac{a}{r}$ **et** $\sin \theta = \frac{b}{r}$. Ne saute jamais l'un des deux.

Étape 4 : Repère le **quadrant** grâce aux deux signes obtenus, puis reconnais l'angle remarquable qui convient.

Étape 5 : Ecris la conclusion sous les deux formes : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$.

Étape 6 : Vérifie en redéveloppant : $r \cos \theta$ doit redonner a et $r \sin \theta$ doit redonner b .

Exemple résolu 1 : un complexe du premier quadrant

Enoncé. Ecris $z = 1 + i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On calcule d'abord le module, en élevant au carré les deux parties. La racine se simplifie ici en un entier.	$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$
On divise chaque partie par le module pour obtenir le cosinus et le sinus de l'argument.	$\cos \theta = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
Les deux nombres sont positifs : le point est dans le premier quadrant, et le couple obtenu est celui de l'angle remarquable $\frac{\pi}{3}$.	$\theta = \frac{\pi}{3}$ convient.
On écrit la forme trigonométrique en mettant le module en facteur.	$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$
La forme exponentielle est la même écriture abrégée.	$z = 2 e^{i\pi/3}.$

Vérification. On redéveloppe : $2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$. On retrouve exactement le complexe de départ, donc le module et l'argument sont corrects.

Exemple résolu 2 : un complexe du troisième quadrant, et deux cas particuliers

Enoncé. Ecris sous forme exponentielle : **1)** $z_1 = -1 - i$; **2)** $z_2 = -2$; **3)** $z_3 = -3i$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Pour z_1 , on calcule le module ; les signes disparaissent au carré, donc le résultat est le même que pour $1 + i$.	$r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
On obtient le cosinus et le sinus, tous deux négatifs : le point est donc dans le troisième quadrant, en bas à gauche.	$\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Dans ce quadrant, l'angle remarquable qui convient est $-\frac{3\pi}{4}$ (on pourrait aussi écrire $\frac{5\pi}{4}$, qui est le même modulo 2π).	$z_1 = \sqrt{2} e^{-3i\pi/4}$.
Pour z_2 , inutile de passer par le cosinus : le point est sur l'axe des réels, du côté négatif.	$ z_2 = 2$ et $\arg(z_2) = \pi$.
On conclut avec l'écriture remarquable des réels négatifs.	$z_2 = 2 e^{i\pi}$.
Pour z_3 , le point est sur l'axe des imaginaires, vers le bas : l'argument est $-\frac{\pi}{2}$.	$z_3 = 3 e^{-i\pi/2}$.

Vérification. Pour z_1 : $\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -1 - i$. Pour z_3 : $3 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 3 \times (-i) = -3i$. Les trois écritures sont donc justes.

Exemple résolu 3 : produit et quotient sous forme exponentielle

Enoncé. On donne $z = 2 e^{i\pi/6}$ et $z' = 3 e^{i\pi/4}$. Détermine le module et un argument de $z z'$, de $\frac{z}{z'}$, puis de $\bar{z}$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Pour un produit, la règle est double : on multiplie les modules et on additionne les arguments. On traite d'abord les modules.	Module de $z z'$: $2 \times 3 = 6$.
On additionne ensuite les arguments, en réduisant les deux fractions au même dénominateur 12.	$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}$, soit $\frac{5\pi}{12}$.
On rassemble le tout en forme exponentielle.	$z z' = 6 e^{5i\pi/12}$.
Pour un quotient, on divise les modules et on soustrait les arguments, dans le bon ordre.	Module : $\frac{2}{3}$; argument : $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$.
On écrit le résultat.	$\frac{z}{z'} = \frac{2}{3} e^{-i\pi/12}$.
Pour le conjugué, le module ne change pas et l'argument change de signe.	$\bar{z} = 2 e^{-i\pi/6}$.

Interprétation. L'argument de $z z'$ est supérieur à celui de z : multiplier z par z' a fait **tourner** son image de $\frac{\pi}{4}$, tout en l'éloignant de l'origine puisque le module a été multiplié par 3. On voit que la multiplication combine une rotation et un agrandissement, ce que la forme algébrique ne laissait pas soupçonner.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). z est un complexe non nul, d'écriture exponentielle $z = r e^{i\theta}$, et α est un réel quelconque. On note M l'image de z et M' l'image de $z e^{i\alpha}$.

Outil (la propriété que j'utilise). Les règles du produit : le module d'un produit est le produit des modules, l'argument d'un produit est la somme des arguments. Et le fait que $|e^{i\alpha}| = 1$.

Conclusion (ce que j'en déduis). Puisque $|e^{i\alpha}| = 1$, le module du produit vaut $r \times 1 = r$: la distance à l'origine est **inchangée**, donc $OM' = OM$. L'argument, lui, devient $\theta + \alpha$: la direction a tourné d'un angle α . Autrement dit,

$$z e^{i\alpha} = r e^{i(\theta+\alpha)},$$

et le point M' est l'image de M par la **rotation de centre O et d'angle α** . Multiplier par un complexe de module 1 ne fait donc rien d'autre que tourner. Et si l'on multiplie par un complexe quelconque $\rho e^{i\alpha}$, on tourne de α et l'on multiplie la distance à l'origine par ρ : c'est une rotation suivie d'un agrandissement.

Rédaction type. « On sait que $z = r e^{i\theta}$ et que $|e^{i\alpha}| = 1$ (hypothèses). Or le produit multiplie les modules et additionne les arguments (propriété). Donc $z e^{i\alpha} = r e^{i(\theta+\alpha)}$: l'image de z tourne autour de O d'un angle α , sans changer de distance à O (conclusion). »

Quel type de raisonnement ? C'est une **déduction directe**, mais son intérêt est ailleurs : elle établit un **dictionnaire** entre une opération algébrique et une transformation géométrique. Retiens le cas particulier le plus utile : multiplier par $i = e^{i\pi/2}$, c'est faire un quart de tour dans le sens direct. Ce dictionnaire est le cœur de la leçon 6.

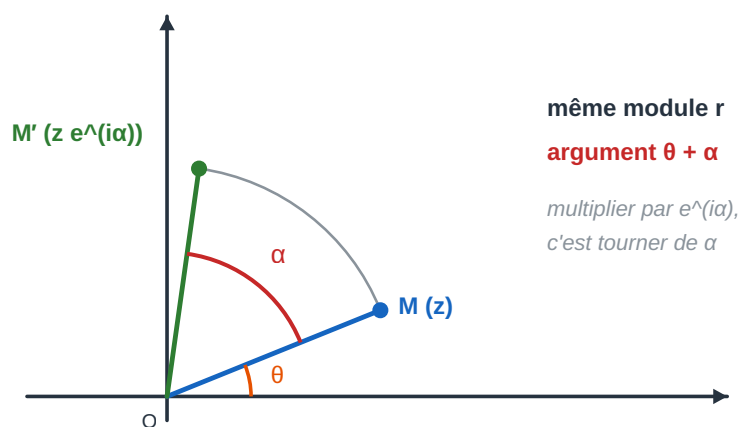


Figure 5. Multiplier par $e^{i\alpha}$ conserve le module et ajoute α à l'argument.

À TOI DE JOUER !

Exercice 5. Ecris sous forme trigonométrique puis exponentielle : **a)** $z = 1 + i$; **b)** $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Exercice 6. On donne $z = 2e^{i\pi/6}$ et $z' = 3e^{i\pi/4}$. Donne le module et un argument de zz' et de $\frac{z}{z'}$.

LECON 4 : Formules de Moivre et d'Euler

Activité de découverte — La noria du marâcher de Nouna

A Nouna, un marâcher irrigue son périmètre avec une noria, c'est-à-dire une grande roue verticale portant des godets. A chaque coup de manivelle, la roue avance exactement d'un cran, ce qui correspond à une rotation d'angle θ dans le sens direct. On prend le centre de la roue pour origine, le rayon pour unité, et l'on repère un godet par son affixe.

Au départ, le godet observé se trouve à l'affixe $z = \cos \theta + i \sin \theta$, obtenue après un premier cran.

- Calcule z^2 en développant, puis regroupe la partie réelle et la partie imaginaire.
- Compare le résultat obtenu avec $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$, en utilisant les formules d'addition connues depuis la première.
- Calcule z^3 à partir de z^2 , et poursuis la comparaison.
- Que conjectures-tu pour z^n , où n est un entier naturel quelconque ?
- Quel est le module de z ? Celui de z^n ? Le godet s'éloigne-t-il du centre de la roue lorsqu'on tourne la manivelle ?

Ce que l'activité met en évidence

Le calcul de z^2 donne $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$. Ce résultat, apparemment compliqué, se reconnaît immédiatement : ses deux morceaux sont exactement les seconds membres des formules de duplication vues en première. Autrement dit, élever au carré un complexe de module 1 revient à **doubler son angle**. La question **c)** confirme la même chose au rang 3, et la conjecture de la question **d)** s'impose : élever à la puissance n revient à multiplier l'angle par n .

La question **e)** explique pourquoi le phénomène est si régulier. Le module de z vaut 1, donc celui de z^n vaut $1^n = 1$: le godet reste sur la roue, à distance constante du centre. Rien ne se passe du côté des longueurs, et **tout** se passe du côté des angles. C'est très exactement la situation de la leçon 3, appliquée n fois de suite.

Ce constat mérite d'être relu à l'envers, car c'est là que se trouve la puissance de la méthode. Nous venons de retrouver les formules de duplication à partir d'un simple développement algébrique. Nous pourrions donc, par le même chemin, obtenir les formules donnant $\cos(3\theta)$, $\cos(4\theta)$, et ainsi de suite, sans jamais les apprendre par cœur. Les nombres complexes ne se contentent pas d'utiliser la trigonométrie : ils la **fabriquent**.

Il reste une seconde route à explorer, en sens inverse. Puisque $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, et que le conjugué $e^{-i\theta}$ vaut $\cos \theta - i \sin \theta$, on doit pouvoir isoler $\cos \theta$ et $\sin \theta$ en additionnant ou en soustrayant ces deux écritures. On obtiendra ainsi des expressions du cosinus et du sinus **au moyen d'exponentielles**, ce qui

transformera les puissances de cosinus en simples développements. C'est le contenu des formules d'Euler, et c'est l'outil de la linéarisation.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Formule de Moivre. Pour tout entier naturel n et tout réel θ :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta),$$

ce qui s'écrit en notation exponentielle

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Plus généralement, pour $z = r e^{i\theta}$ non nul : $z^n = r^n e^{in\theta}$. Le **module est élevé** à la puissance n , l'**argument est multiplié** par n .

La formule s'obtient en répétant n fois la règle du produit établie à la leçon précédente : chaque multiplication par $e^{i\theta}$ ajoute θ à l'argument, donc n multiplications ajoutent $n\theta$. C'est la seule justification à retenir, et elle explique pourquoi la formule ne comporte aucune constante mystérieuse.

Retiens surtout la dissymétrie de traitement entre les deux nombres qui décrivent z : sur le module, la puissance agit comme une puissance ; sur l'argument, elle agit comme une multiplication. Confondre les deux conduit à des erreurs spectaculaires, du type « le module de $(1+i)^8$ vaut $8\sqrt{2}$ », alors qu'il vaut $(\sqrt{2})^8 = 16$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Formules d'Euler. Pour tout réel θ :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Elles s'obtiennent en additionnant puis en soustrayant les deux égalités $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ et $e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta$.

Ces deux formules jouent le rôle inverse de celle de Moivre. Moivre part de la trigonométrie et va vers les puissances ; Euler part des exponentielles et redonne la trigonométrie. Dans la pratique, on utilise Euler pour **descendre les exposants** : au lieu d'avoir un cosinus élevé à la puissance 3, on obtient une somme de cosinus d'angles multiples, c'est-à-dire une expression dont on sait calculer une primitive ou dont on peut étudier les variations. Cette opération porte un nom, la **linéarisation**, et elle resservira au chapitre du calcul intégral.

Note le $2i$ au dénominateur de la formule du sinus : il est très souvent oublié, ou remplacé par 2. Le plus simple pour le contrôler est de tester $\theta = \frac{\pi}{2}$, où l'on doit trouver $\sin \frac{\pi}{2} = \frac{i - (-i)}{2i} = \frac{2i}{2i} = 1$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Trois applications des formules d'Euler.

- **Linéariser** : transformer $\cos^n \theta$ ou $\sin^n \theta$ en une **somme** de $\cos(k\theta)$ et de $\sin(k\theta)$, en remplaçant chaque facteur par son écriture d'Euler puis en développant.
- **Transformer un produit en somme** :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)], \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)].$$

- **Transformer une somme en produit** :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}, \quad \sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

Ces trois familles de transformations sont en réalité une seule et même chose, lue dans des sens différents. Il n'est donc pas nécessaire de les apprendre séparément : il suffit de savoir passer par les exponentielles, développer, puis regrouper les termes conjugués deux par deux, car $e^{ix} + e^{-ix}$ redonne $2 \cos x$. Les formules ci-dessus sont le résultat de ce travail, elles servent d'aide-mémoire.

Pour les sommes en produits, la manière la plus sûre de retrouver la formule sans hésitation consiste à poser $p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}$ et $q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}$: la demi-somme et la demi-différence des angles apparaissent naturellement, et l'on reconnaît alors les formules d'addition.

MÉTHODE : CALCULER UNE PUISSANCE AVEC LA FORMULE DE MOIVRE

Étape 1 : Mets d'abord le complexe sous forme exponentielle $z = r e^{i\theta}$, en calculant son module puis son argument. C'est l'étape la plus longue, mais elle est incontournable.

Étape 2 : Applique $z^n = r^n e^{in\theta}$: élève le module, multiplie l'argument.

Étape 3 : Réduis l'argument obtenu modulo 2π si le résultat dépasse un tour, afin de reconnaître un angle familier.

Étape 4 : Reviens à la forme algébrique si l'énoncé le demande, en remplaçant $e^{i\alpha}$ par $\cos \alpha + i \sin \alpha$.

Étape 5 : Contrôle le module du résultat : il doit valoir r^n .

Exemple résolu 1 : deux puissances élevées

Enoncé. Calcule $(1+i)^4$ et $(\sqrt{3}+i)^6$, en donnant le résultat sous forme algébrique.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On met $1 + i$ sous forme exponentielle : son module vaut $\sqrt{2}$, et son argument $\frac{\pi}{4}$ car le cosinus et le sinus valent tous deux $\frac{\sqrt{2}}{2}$.	$1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$.
On applique Moivre : le module est élevé à la puissance 4, l'argument est multiplié par 4.	$(1 + i)^4 = (\sqrt{2})^4 e^{i\pi} = 4 e^{i\pi}$.
Un argument de π correspond à un réel négatif : $e^{i\pi} = -1$.	$(1 + i)^4 = -4$.
Pour le second, le module vaut $\sqrt{3+1} = 2$ et le cosinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ avec un sinus $\frac{1}{2}$: c'est l'angle $\frac{\pi}{6}$.	$\sqrt{3} + i = 2 e^{i\pi/6}$.
On applique de nouveau Moivre avec $n = 6$.	$(\sqrt{3} + i)^6 = 2^6 e^{i\pi} = 64 \times (-1)$.
On conclut.	$(\sqrt{3} + i)^6 = -64$.

Vérification. Contrôlons le premier résultat autrement : $(1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$, donc $(1 + i)^4 = (2i)^2 = 4i^2 = -4$. Les deux chemins concordent. On mesure au passage l'intérêt de Moivre : pour la puissance 6 du second complexe, le calcul direct aurait demandé cinq multiplications successives.

MÉTHODE : LINÉARISER UNE PUISSANCE DE COSINUS OU DE SINUS

Étape 1 : Remplace $\cos \theta$ par $\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$, ou $\sin \theta$ par $\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, et garde l'exposant tel quel.

Étape 2 : Développe la puissance obtenue avec l'identité remarquable ou le triangle de Pascal, en traitant $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ comme deux lettres ordinaires.

Étape 3 : Simplifie chaque terme en utilisant $e^{ix} \times e^{iy} = e^{i(x+y)}$; les termes du milieu se simplifient souvent en constantes, car $e^{ix} \times e^{-ix} = 1$.

Étape 4 : Regroupe les termes deux par deux, un $e^{ik\theta}$ avec le $e^{-ik\theta}$ correspondant, et remplace chaque paire par $2 \cos(k\theta)$.

Étape 5 : Vérifie le résultat en donnant à θ une valeur simple, par exemple 0.

Exemple résolu 2 : linéariser $\cos^2 \theta$, puis $\cos^3 \theta$

Énoncé. Linéarise $\cos^2 \theta$, puis $\cos^3 \theta$, à l'aide des formules d'Euler.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On remplace le cosinus par son écriture d'Euler et l'on garde le carré.	$\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2.$
On développe le carré du numérateur ; le double produit vaut $2 e^{i\theta} e^{-i\theta}$, c'est-à-dire 2.	$\cos^2 \theta = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4}.$
On regroupe les deux exponentielles conjuguées, qui redonnent $2 \cos(2\theta)$.	$\cos^2 \theta = \frac{2 \cos(2\theta) + 2}{4}, \text{ soit } \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\theta).$
Pour le cube, on procède de même en développant avec les coefficients 1, 3, 3, 1.	$\cos^3 \theta = \frac{N}{8}, \text{ avec } N = e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}.$
On regroupe les deux paires conjuguées, l'une donnant $2 \cos(3\theta)$, l'autre $2 \cos \theta$.	$\cos^3 \theta = \frac{2 \cos(3\theta) + 6 \cos \theta}{8}.$
On simplifie la fraction.	$\cos^3 \theta = \frac{1}{4} \cos(3\theta) + \frac{3}{4} \cos \theta.$

Vérification. Testons $\theta = 0$ dans les deux résultats. Pour le premier : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, et $\cos^2 0 = 1$. Pour le second : $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$, et $\cos^3 0 = 1$. Testons encore $\theta = \pi$ dans le second : $\frac{1}{4} \cos(3\pi) + \frac{3}{4} \cos \pi = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1$, et $\cos^3 \pi = (-1)^3 = -1$. Les linéarisations sont correctes.

Exemple résolu 3 : produit en somme, puis somme en produit

Enoncé. 1) Transforme $\cos(3x) \cos x$ en une somme. **2)** Montre que $\cos(3x) + \cos x = 2 \cos(2x) \cos x$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On remplace chaque cosinus par son écriture d'Euler, ce qui transforme le produit en un produit de deux sommes.	$\cos(3x) \cos x = \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} \times A,$ avec $A = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$
On développe les quatre produits, en additionnant les exposants à chaque fois.	$= \frac{e^{4ix} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{-4ix}}{4}.$
On regroupe les paires conjuguées : la première donne $2 \cos(4x)$, la seconde $2 \cos(2x)$.	$\cos(3x) \cos x = \frac{1}{2} [\cos(4x) + \cos(2x)].$
Pour la question 2) , on lit la formule précédente à l'envers, avec les demi-sommes et demi-différences des angles $3x$ et x .	$\frac{3x+x}{2} = 2x \text{ et } \frac{3x-x}{2} = x.$
On applique la formule de transformation d'une somme en produit.	$\cos(3x) + \cos x = 2 \cos(2x) \cos x.$
Le même calcul avec les sinus donne la formule jumelle, utile pour les exercices.	$\sin(3x) + \sin x = 2 \sin(2x) \cos x.$

Vérification. Testons la question **2)** en $x = \frac{\pi}{3}$. A gauche : $\cos \pi + \cos \frac{\pi}{3} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. A droite : $2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$. Les deux membres coïncident.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). θ est un réel quelconque, et l'on considère le complexe $z = \cos \theta + i \sin \theta$, de module 1.

Outil (la propriété que j'utilise). La formule de Moivre appliquée avec $n = 2$, et l'unicité de l'écriture algébrique, qui autorise l'identification des parties réelles et des parties imaginaires.

Conclusion (ce que j'en déduis). D'un côté, Moivre donne directement

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta).$$

De l'autre, en développant le carré du membre de gauche comme un carré ordinaire, et en remplaçant i^2 par -1 :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta.$$

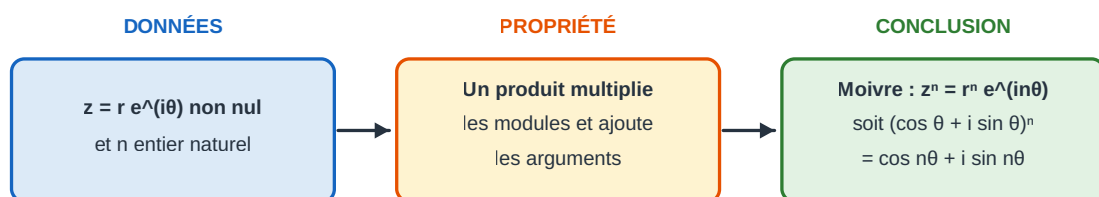
Les deux écritures désignent le même complexe. Par identification des parties réelles, puis des parties imaginaires, on obtient d'un seul coup les deux formules de duplication :

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta.$$

Le même travail avec $n = 3$ donnerait $\cos(3\theta) = \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$ et $\sin(3\theta) = 3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta$, sans qu'il soit nécessaire de mémoriser quoi que ce soit.

Rédaction type. « On sait que $z = \cos \theta + i \sin \theta$ a pour module 1 (hypothèse). Or la formule de Moivre donne $z^2 = \cos(2\theta) + i \sin(2\theta)$, et le développement direct donne $z^2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta$ (propriétés). Donc, par identification, $\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ et $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$ (conclusion). »

Déductogramme.



Déductogramme : de la règle du produit à la formule de Moivre

Figure 6. De la règle du produit à la formule de Moivre.

Quel type de raisonnement ? C'est une **déduction directe** appuyée sur une technique très employée en Terminale : le **double calcul**. On calcule une même quantité de deux manières différentes, puis on identifie les résultats. Cette stratégie ne démontre pas seulement, elle **produit** des formules nouvelles, et elle reviendra en calcul intégral comme en dénombrement.

ATTENTION !

Dans la formule de Moivre, l'exposant porte sur **tout** $i\theta$: $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, et non $e^{i \cdot n}$. L'argument devient $n\theta$, pas n . Ne confonds pas non plus l'effet sur le module (une **puissance** r^n) et l'effet sur l'argument (une **multiplication** $n\theta$). Enfin, la formule de Moivre s'applique à $\cos \theta + i \sin \theta$, avec un **plus** et le **même angle** aux deux places : pour $(\cos \theta - i \sin \theta)^n$, commence par écrire $\cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$, ce qui donne $\cos(n\theta) - i \sin(n\theta)$.

À TOI DE JOUER !

Exercice 7. Calcule $(1 + i)^6$ à l'aide de la formule de Moivre.

Exercice 8. Linéarise $\sin^2 \theta$ à l'aide des formules d'Euler.

LECON 5 : Equations dans $\mathbb{C}$

Activité de découverte — Le devoir corrigé de Garango

Au lycée de Garango, une classe de Terminale D reprend un ancien devoir de première. Deux équations y figuraient, et le professeur avait porté la même mention à côté de chacune : « pas de solution ». La classe reprend aujourd'hui ce devoir avec un outil de plus, le nombre i .

On considère les équations $z^2 + 1 = 0$ et $z^2 - 2z + 5 = 0$, désormais posées dans $\mathbb{C}$.

- a) Résous la première dans $\mathbb{C}$ en te ramenant à $z^2 = -1$. Combien trouves-tu de solutions ?
- b) Pour la seconde, calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Quel est son signe ?
- c) Ecris $z^2 - 2z + 5$ sous la forme $(z - 1)^2 + 4$ (forme canonique), puis résous l'équation $(z - 1)^2 = -4$ en utilisant la question a).
- d) Compare les deux solutions obtenues. Que remarques-tu si tu prends le conjugué de l'une d'elles ?
- e) Reprends la formule habituelle $z = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$: que faudrait-il écrire à la place de $\sqrt{\Delta}$ pour qu'elle redonne tes solutions ?

Ce que l'activité met en évidence

La question a) montre qu'un carré négatif ne pose plus aucun problème : $z^2 = -1$ équivaut à $z^2 - i^2 = 0$, c'est-à-dire à $(z - i)(z + i) = 0$, et l'équation a donc **deux** solutions, i et $-i$. Ce n'est pas une seule solution devenue possible, c'est une paire, et cette paire est faite de deux nombres **opposés**. Ce sera le cas général : dans $\mathbb{C}$, tout nombre non nul possède exactement deux racines carrées, opposées l'une de l'autre.

La question c) est la clé du passage au cas général. La forme canonique ramène n'importe quel trinôme du second degré à une équation de la forme « un carré égale un nombre », c'est-à-dire précisément au cas traité en a). Il n'y a donc rien de nouveau à inventer : la méthode de première continue de fonctionner, à condition d'accepter que le second membre puisse être négatif.

La question d) fait apparaître la deuxième idée forte de la leçon. Les deux solutions trouvées sont **conjuguées** l'une de l'autre. Ce n'est pas un hasard de cet exemple : dès que les coefficients de l'équation

sont **réels**, les racines non réelles vont toujours par paires conjuguées. Nous en verrons la raison plus loin, et cette propriété donne un contrôle gratuit sur tout résultat de calcul.

La question **e)**, enfin, désigne le seul point délicat. On ne peut pas écrire $\sqrt{\Delta}$ quand Δ est négatif, car le symbole $\sqrt{}$ reste réservé aux réels positifs. On écrira donc $i\sqrt{-\Delta}$, où $-\Delta$ est cette fois un réel positif. La formule prend alors la forme $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, valable uniquement pour des coefficients réels. Lorsque les coefficients seront eux-mêmes complexes, il faudra remplacer la racine carrée par un nombre δ dont on aura vérifié qu'il vérifie $\delta^2 = \Delta$, et c'est ce que fera la seconde partie de la leçon.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Equations $z^2 = k$ avec k réel.

- Si $k > 0$: deux solutions réelles, $z = \sqrt{k}$ et $z = -\sqrt{k}$.
- Si $k = 0$: une solution double, $z = 0$.
- Si $k < 0$: deux solutions imaginaires pures **opposées**, $z = i\sqrt{-k}$ et $z = -i\sqrt{-k}$.

Par exemple, $z^2 = -9$ donne $z = 3i$ ou $z = -3i$, ce qui s'écrit $z = \pm 3i$.

Second degré à coefficients réels. Pour $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$, on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta \geq 0$: les solutions réelles habituelles.
- Si $\Delta < 0$: **deux solutions complexes conjuguées**

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \overline{z_1}.$$

Le fait remarquable est qu'il n'y a désormais plus de cas sans solution. Un trinôme du second degré possède toujours deux racines dans $\mathbb{C}$, éventuellement confondues lorsque $\Delta = 0$. La théorie devient uniforme, et c'est exactement pour obtenir cette uniformité que l'on a construit $\mathbb{C}$.

Le lien entre les deux parties de l'encadré tient en une ligne : la forme canonique $a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ ramène toujours l'équation à un carré égal à un nombre. La formule avec $i\sqrt{-\Delta}$ n'est donc pas une formule nouvelle à mémoriser, c'est la formule de première dans laquelle on a simplement remplacé l'impossible $\sqrt{\Delta}$ par le légitime $i\sqrt{-\Delta}$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Racines carrées d'un nombre complexe. Tout complexe **non nul** A admet exactement **deux racines carrées**, opposées l'une de l'autre. Pour les déterminer, on pose $z = x + iy$ avec x et y réels, et l'on traduit $z^2 = A$ par le système

$$x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(A), \quad x^2 + y^2 = |A|, \quad 2xy = \operatorname{Im}(A).$$

Les **deux premières** équations donnent x^2 et y^2 par somme et différence ; la **troisième** ne sert qu'à choisir les signes : si $\operatorname{Im}(A) > 0$, alors x et y sont de **même** signe ; si $\operatorname{Im}(A) < 0$, ils sont de **signes contraires**.

Il faut comprendre d'où viennent les trois équations, sinon on les retient mal. En développant, $z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$: l'identification avec A donne la première et la troisième équation. La deuxième s'obtient en prenant les modules, puisque $|z^2| = |z|^2 = x^2 + y^2$ doit être égal à $|A|$. La deuxième équation est donc redondante d'un point de vue logique, mais elle est décisive en pratique, car c'est elle qui, jointe à la première, permet de trouver x^2 et y^2 sans résoudre d'équation du quatrième degré. Une remarque de méthode : la troisième équation ne sert **jamais** à calculer, seulement à décider des signes. On l'utilise uniquement à la fin, et l'on ne retient d'elle que son signe.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Second degré à coefficients complexes. Pour $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c complexes et $a \neq 0$:

1. on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$, qui est cette fois un nombre **complexe** ;
2. on cherche **une** racine carrée δ de Δ , c'est-à-dire un complexe vérifiant $\delta^2 = \Delta$;
3. les solutions sont

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Le choix de l'une ou l'autre des deux racines carrées de Δ donne les **mêmes** solutions, échangées.

Deux différences essentielles avec le cas réel doivent être notées. D'abord, il n'y a plus de discussion selon le signe de Δ : un complexe n'a pas de signe, et le seul cas particulier restant est $\Delta = 0$, qui donne une racine double. Ensuite, les solutions ne sont **plus conjuguées** en général : la conjugaison ne se conserve que si les coefficients sont réels. Ecrire « les deux racines sont conjuguées » devant une équation à coefficients complexes est une faute classique.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Equations $z^n = w$ (racines n -ièmes). Soit $w = r e^{i\theta}$ un complexe non nul et n un entier naturel non nul. L'équation $z^n = w$ admet exactement n **solutions** :

$$z_k = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k \in \{0; 1; \dots; n-1\}.$$

Leurs images sont **régulièrement réparties** sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$, deux solutions consécutives étant séparées par l'angle $\frac{2\pi}{n}$. Elles forment donc les sommets d'un **polygone régulier** à n côtés.

Le raisonnement qui conduit à cette formule est court et il vaut mieux le comprendre que l'apprendre. En posant $z = \rho e^{i\varphi}$, l'équation $z^n = w$ devient $\rho^n e^{in\varphi} = r e^{i\theta}$. Deux complexes non nuls sont égaux quand leurs modules sont égaux et leurs arguments égaux **modulo** 2π : on obtient donc $\rho^n = r$, d'où $\rho = \sqrt[n]{r}$ (racine n -ième d'un réel positif, elle est unique), et $n\varphi = \theta + 2k\pi$, d'où $\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$.

C'est le « modulo 2π » qui crée les n solutions. Sans lui, on n'en trouverait qu'une. En faisant varier k de 0 à $n-1$, on obtient n angles distincts ; à partir de $k = n$, on retombe sur le premier, puisque l'angle a alors augmenté de 2π . Voilà pourquoi la liste s'arrête exactement à $n-1$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Equations qui se ramènent au second degré.

- **Equation bicarrée** $az^4 + bz^2 + c = 0$: on pose $Z = z^2$, on résout $aZ^2 + bZ + c = 0$, puis on cherche les racines carrées de chaque valeur de Z trouvée. On obtient ainsi **quatre** solutions.
- **Degré 3 avec une racine indiquée** z_0 : on factorise sous la forme

$$P(z) = (z - z_0)(z^2 + pz + q),$$

et l'on détermine p et q par **identification** des coefficients, après développement du membre de droite. On achève ensuite en résolvant l'équation du second degré.

Une équation polynomiale de degré n a toujours **au plus** n solutions dans $\mathbb{C}$: ce compte permet de savoir si la résolution est terminée.

Le principe commun à ces deux techniques est le **changement de problème** : on ne sait pas résoudre directement un degré 3 ou un degré 4, mais on sait résoudre un degré 2. On s'y ramène donc, soit par un changement d'inconnue, soit par une factorisation. Le compte des solutions attendu, égal au degré, sert de contrôle final : si l'on n'en a trouvé que trois pour une équation de degré 4, c'est qu'il en manque une.

MÉTHODE : RÉSOUDRE $az^2 + bz + c = 0$ À COEFFICIENTS RÉELS LORSQUE $\Delta < 0$

Étape 1 : Identifie a, b, c et calcule $\Delta = b^2 - 4ac$; constate que $\Delta < 0$.

Étape 2 : Ecris $-\Delta$, qui est un réel **positif**, et calcule $\sqrt{-\Delta}$.

Étape 3 : Applique $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et simplifie la fraction.

Étape 4 : Donne les deux solutions sous forme algébrique, séparément, et vérifie qu'elles sont **conjuguées**.

Étape 5 : Contrôle en calculant la somme des racines, qui doit valoir $-\frac{b}{a}$, et leur produit, qui doit valoir $\frac{c}{a}$.

Exemple résolu 1 : un trinôme réel à discriminant négatif

Enoncé. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On identifie les trois coefficients, tous réels, puis on calcule le discriminant comme en première.	$a = 1, b = -2, c = 5$; $\Delta = 4 - 20 = -16$.
Le discriminant est négatif : il n'y a pas de solution réelle, mais deux solutions complexes conjuguées.	$\Delta = -16 < 0$.
On calcule la racine carrée de l'opposé du discriminant, qui est un réel positif.	$-\Delta = 16$ et $\sqrt{16} = 4$.
On applique la formule, en n'oubliant pas le facteur i devant la racine.	$z = \frac{2 \pm 4i}{2}$.
On simplifie la fraction en divisant chaque terme par 2.	$z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i$.

Vérification. Les deux solutions sont bien conjuguées, comme l'exige la théorie pour des coefficients réels.

Contrôlons de plus par la somme et le produit : $z_1 + z_2 = 2$, ce qui vaut $-\frac{b}{a} = 2$, et

$z_1 z_2 = (1 + 2i)(1 - 2i) = 1 + 4 = 5$, ce qui vaut $\frac{c}{a} = 5$. Tout concorde.

MÉTHODE : DÉTERMINER LES RACINES CARRÉES D'UN NOMBRE COMPLEXE

Étape 1 : Pose $z = x + iy$ avec x et y réels, et note A le complexe dont tu cherches les racines carrées.

Étape 2 : Ecris les trois équations : $x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(A)$, $x^2 + y^2 = |A|$ et $2xy = \operatorname{Im}(A)$.

Étape 3 : Additionne les deux premières pour obtenir $2x^2$, soustrais-les pour obtenir $2y^2$.

Étape 4 : Déduis-en les valeurs possibles de x et de y en prenant les racines carrées, puis utilise le **signe** de $\operatorname{Im}(A)$ pour accoupler correctement les signes de x et de y .

Étape 5 : Conclut par deux racines opposées, et vérifie en élevant l'une d'elles au carré.

Exemple résolu 2 : racines carrées, puis équation à coefficients complexes

Enoncé. 1) Détermine les racines carrées de $A = -5 + 12i$. **2)** Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0.$$

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On calcule d'abord le module de A , indispensable pour la deuxième équation du système.	$ A = \sqrt{25 + 144} = 13.$
On écrit les trois équations en posant $z = x + iy$.	$x^2 - y^2 = -5$; $x^2 + y^2 = 13$; $2xy = 12.$
En additionnant les deux premières, on obtient $2x^2 = 8$; en les soustrayant, $2y^2 = 18$.	$x^2 = 4$ et $y^2 = 9.$
Comme $\operatorname{Im}(A) = 12 > 0$, les réels x et y sont de même signe.	Racines carrées : $2 + 3i$ et $-2 - 3i$.
Pour l'équation, on calcule le discriminant en développant soigneusement le carré.	$\Delta = (3 + i)^2 - 4(2 + 2i)$, soit $\Delta = 8 + 6i - 8 - 8i = -2i.$
On cherche une racine carrée δ de $-2i$: ici $ -2i = 2$, d'où $x^2 = 1$ et $y^2 = 1$, avec des signes contraires car $\operatorname{Im} = -2 < 0$.	$\delta = 1 - i$ convient (car $(1 - i)^2 = -2i$).
On applique la formule avec δ à la place de la racine carrée.	$z = \frac{(3 + i) \pm (1 - i)}{2}.$
On calcule séparément les deux solutions.	$z_1 = \frac{4}{2} = 2$ et $z_2 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i.$

Vérification. Pour la question **1)** : $(2 + 3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$, c'est bien A . Pour la question **2)**, on refactorise : $(z - 2)(z - (1 + i)) = z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i$, on retrouve l'équation de départ. Note que les deux solutions ne sont **pas** conjuguées, ce qui est normal, les coefficients n'étant pas réels.

MÉTHODE : RÉSOUDRE $z^n = w$

Étape 1 : Ecris le second membre sous forme exponentielle : $w = r e^{i\theta}$.

Étape 2 : Calcule le module commun des solutions, $\rho = \sqrt[n]{r}$, qui est un réel positif unique.

Étape 3 : Ecris les arguments $\frac{\theta + 2k\pi}{n}$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$, et pas au-delà.

Étape 4 : Donne les n solutions sous forme exponentielle, puis, si l'énoncé le demande, sous forme algébrique.

Étape 5 : Vérifie que tu en as bien n , et que leurs images se répartissent régulièrement sur un cercle.

Exemple résolu 3 : les racines cubiques de $8i$

Énoncé. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8i$, et place les images des solutions.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On met le second membre sous forme exponentielle : son module vaut 8 et son argument $\frac{\pi}{2}$, puisque $8i$ est sur l'axe des imaginaires vers le haut.	$8i = 8 e^{i\pi/2}$.
Le module des solutions est la racine cubique de 8, c'est-à-dire 2 : les trois images sont sur un même cercle.	$\rho = \sqrt[3]{8} = 2$.
Les arguments s'obtiennent en divisant par 3 l'argument augmenté de multiples de 2π .	$\varphi_k = \frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}$, $k \in \{0; 1; 2\}$.
Pour $k = 0$, l'argument vaut $\frac{\pi}{6}$.	$z_0 = 2 e^{i\pi/6} = \sqrt{3} + i$.
Pour $k = 1$, on ajoute $\frac{2\pi}{3}$ au précédent.	$z_1 = 2 e^{5i\pi/6} = -\sqrt{3} + i$.
Pour $k = 2$, on ajoute encore $\frac{2\pi}{3}$.	$z_2 = 2 e^{3i\pi/2} = -2i$.

Vérification. Contrôlons la troisième solution par le calcul direct : $(-2i)^3 = -8i^3 = -8 \times (-i) = 8i$. C'est bien le second membre. Les trois images sont à distance 2 de l'origine et leurs arguments diffèrent de $\frac{2\pi}{3}$: elles forment un **triangle équilatéral** inscrit dans le cercle de rayon 2.

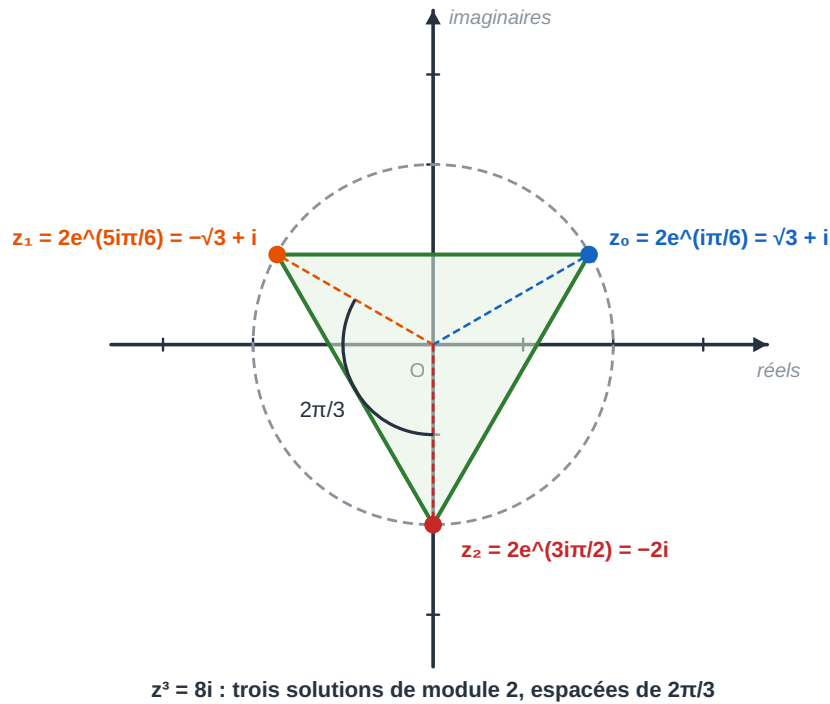


Figure 7. Les trois racines cubiques de $8i$, sommets d'un triangle équilatéral.

Exemple résolu 4 : une équation de degré 3 avec une racine indiquée

Enoncé. On considère $P(z) = z^3 - (2 + 3i)z^2 + (5 + 6i)z - 15i$. **1)** Montre que P admet une racine imaginaire pure z_0 . **2)** Détermine p et q tels que $P(z) = (z - z_0)(z^2 + pz + q)$. **3)** Achève la résolution de $P(z) = 0$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Une racine imaginaire pure s'écrit $z_0 = iy$ avec y réel. On remplace et l'on développe, en n'oubliant pas que $i^3 = -i$.	$P(iy) = (2y^2 - 6y) + iQ$, avec $Q = -y^3 + 3y^2 + 5y - 15$.
Un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles : cela donne deux conditions à satisfaire ensemble.	$2y^2 - 6y = 0$ et $-y^3 + 3y^2 + 5y - 15 = 0$.
La première équation se factorise et donne deux candidats ; on les teste dans la seconde.	$2y(y - 3) = 0$ donne $y = 0$ ou $y = 3$.
Pour $y = 0$ la partie imaginaire vaut -15 , ce qui est refusé ; pour $y = 3$ elle vaut $-27 + 27 + 15 - 15$, c'est-à-dire 0.	La racine est $z_0 = 3i$.
Pour la question 2) , on développe le produit proposé et l'on range selon les puissances de z .	$(z - 3i)(z^2 + pz + q)$, soit $z^3 + (p - 3i)z^2 + (q - 3ip)z - 3iq$.
On identifie les coefficients de même degré avec ceux de P , en commençant par le terme constant, plus simple.	$-3iq = -15i$ donne $q = 5$; $p - 3i = -(2 + 3i)$ donne $p = -2$.
On vérifie le coefficient restant, celui de z , qui n'a pas servi à trouver p et q .	$q - 3ip = 5 + 6i$ ✓
Pour la question 3) , on résout le trinôme obtenu, dont les coefficients sont réels.	$z^2 - 2z + 5 = 0$; $\Delta = -16$; $z = 1 \pm 2i$.

Interprétation. L'équation de degré 3 a exactement **trois** solutions, $3i$, $1 + 2i$ et $1 - 2i$, ce qui est conforme au degré. Remarque que deux d'entre elles sont conjuguées : c'est parce que le facteur du second degré est, lui, à coefficients réels. La méthode est toujours la même, et l'énoncé fournit toujours la première racine ou le moyen de la trouver.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$, et z_1 est une solution de $az^2 + bz + c = 0$.

Outil (la propriété que j'utilise). La conjugaison est compatible avec l'addition et la multiplication : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ et $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$. De plus, un réel est égal à son propre conjugué.

Conclusion (ce que j'en déduis). Partons de l'égalité $az_1^2 + bz_1 + c = 0$ et prenons le conjugué des deux membres. Le conjugué de 0 est 0, et la conjugaison traverse la somme et le produit :

$$\overline{az_1^2 + bz_1 + c} = 0.$$

Or a , b et c sont réels, donc $\bar{a} = a$, $\bar{b} = b$ et $\bar{c} = c$. Il reste

$$a\overline{z_1^2} + b\bar{z_1} + c = 0,$$

ce qui signifie exactement que $\bar{z_1}$ est aussi solution de l'équation. Si z_1 n'est pas réel, alors $\bar{z_1} \neq z_1$: le trinôme possède donc deux racines distinctes, conjuguées l'une de l'autre.

Rédaction type. « On sait que z_1 est racine et que a , b , c sont réels (hypothèses). Or la conjugaison conserve les sommes et les produits, et laisse les réels inchangés (propriété). Donc $\bar{z_1}$ est aussi racine : les deux racines sont conjuguées (conclusion). »

Quel type de raisonnement ? C'est une **déduction directe**, obtenue par une technique très efficace : on applique une même opération, ici la conjugaison, aux deux membres d'une égalité. Note la place décisive de l'hypothèse « coefficients réels » : sans elle, la troisième ligne du calcul s'effondre. C'est un bon exemple d'énoncé où l'hypothèse ne décore pas, elle porte toute la démonstration.

ATTENTION !

La formule $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et la propriété « racines conjuguées » ne valent **que pour des coefficients réels**. Avec des coefficients complexes, passe par une racine carrée δ de Δ : les deux racines carrées possibles donnent les **mêmes** solutions. N'écris jamais $\sqrt{\Delta}$ lorsque Δ n'est pas un réel positif, le symbole $\sqrt{}$ étant réservé aux réels positifs. Enfin, pour une équation $z^n = w$, ne t'arrête pas à une seule solution : il y en a exactement n , et l'oubli des autres est l'erreur la plus fréquente de cette leçon.

À TOI DE JOUER !

Exercice 9. Résous dans $\mathbb{C}$: **a)** $z^2 = -16$; **b)** $z^2 + z + 1 = 0$.

Exercice 10. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 4z + 13 = 0$, et vérifie que les solutions sont conjuguées.

LECON 6 : Nombres complexes et géométrie du plan

Activité de découverte — Le bornage du champ de Yako

A Yako, un géomètre borne une parcelle avant sa mise en culture. Il reporte les bornes sur un plan muni d'un repère orthonormé direct, l'unité valant le décamètre. Trois bornes A , B et C ont pour affixes $a = 2 + i$, $b = 5 + i$ et $c = 2 + 4i$.

Le propriétaire voudrait savoir si l'angle du champ en A est bien droit, et si les deux côtés issus de A ont la même longueur, car il souhaite y installer un carré de maraîchage.

- a) Calcule les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- b) Calcule le quotient $\frac{c-a}{b-a}$ et mets-le sous forme algébrique.
- c) Calcule le module de ce quotient. Compare-le au rapport $\frac{AC}{AB}$ obtenu en calculant les deux longueurs séparément.
- d) Donne un argument de ce quotient. Que peux-tu conjecturer sur l'angle du champ en A ?
- e) Réponds à la question du propriétaire : le coin du champ convient-il pour un carré ?

Ce que l'activité met en évidence

Le calcul de la question **b)** livre un résultat étonnamment simple, alors que la question posée était une question de forme, pas de calcul. C'est le premier point à retenir : un **quotient** de deux différences d'affixes contient à lui seul toute l'information sur la configuration des trois points. Il n'y a pas besoin de mesurer, ni de tracer, ni d'invoquer Pythagore ou le produit scalaire.

La question **c)** explique pourquoi. Le numérateur $c - a$ est l'affixe de $\overrightarrow{AC}$, donc son module est la longueur AC ; le dénominateur $b - a$ est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$, donc son module est AB . Comme le module d'un quotient est le quotient des modules, le module du quotient est nécessairement le rapport $\frac{AC}{AB}$. Une égalité de longueurs se lit donc sur un module qui vaut 1.

La question **d)** complète le tableau du côté des angles. L'argument d'un quotient est la différence des arguments, c'est-à-dire ici la différence des directions de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{AB}$: c'est très exactement une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, l'angle du champ en A . Un argument égal à $\frac{\pi}{2}$ signale donc un angle droit, et l'on sait depuis la leçon 3 que les complexes d'argument $\frac{\pi}{2}$ modulo π sont exactement les imaginaires purs.

Il ne reste plus qu'à assembler ces deux lectures. Un seul nombre, le quotient $\frac{c-a}{b-a}$, code à la fois un rapport de longueurs et un angle. C'est le principe de toute la leçon : le module dit **combien**, l'argument dit **de combien on tourne**. Réel signifiera alignement, imaginaire pur signifiera angle droit, module 1 signifiera isocèle. Et lorsque le quotient vaut exactement i , comme ici, les deux informations se combinent en un triangle rectangle isocèle.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Interprétation géométrique du quotient. Soit A, B, C trois points deux à deux distincts, d'affixes a, b, c . Alors

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB} \quad \text{et} \quad \arg \left(\frac{c-a}{b-a} \right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Le sommet étudié est celui dont l'affixe est **soustraite** partout, ici A , et l'angle se mesure de $\overrightarrow{AB}$ vers $\overrightarrow{AC}$.

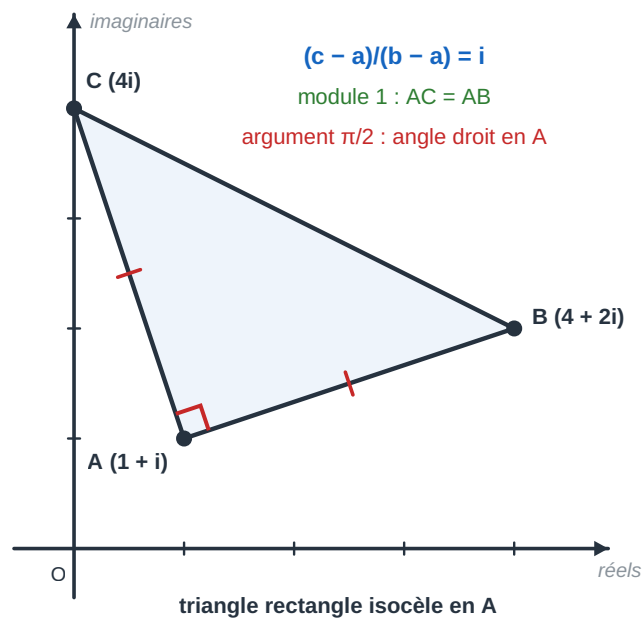


Figure 8. Le quotient $\frac{c-a}{b-a}$ lit d'un coup le rapport des longueurs et l'angle en A .

Ces deux formules ne sont pas des nouveautés : ce sont les propriétés du module et de l'argument d'un quotient, appliquées à des différences d'affixes. Tout l'art consiste à reconnaître, derrière le calcul, la figure qu'il décrit. Retiens la phrase de contrôle : « module, c'est un rapport de longueurs ; argument, c'est un angle ».

Fais bien attention à l'ordre des lettres. Le quotient $\frac{b-a}{c-a}$ n'est pas le même que $\frac{c-a}{b-a}$: son argument est l'angle **opposé**, mesuré de $\overrightarrow{AC}$ vers $\overrightarrow{AB}$, et son module est le rapport inverse. Pour un angle droit ou un alignement, cela n'a aucune conséquence, mais pour un angle de $\frac{\pi}{3}$, le signe change.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Caractérisations des configurations. Avec les mêmes notations :

- A, B, C sont **alignés** $\iff \frac{c-a}{b-a}$ est **réel** ;
- $(AB) \perp (AC)$, c'est-à-dire angle droit en A , $\iff \frac{c-a}{b-a}$ est **imaginaire pur** (non nul) ;
- ABC est **isocèle en** A $\iff |c-a| = |b-a|$, c'est-à-dire $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1$;
- ABC est **rectangle isocèle en** A $\iff \frac{c-a}{b-a} = i$ ou $\frac{c-a}{b-a} = -i$;
- ABC est **équilatéral** $\iff AB = AC = BC$, c'est-à-dire $|b-a| = |c-a| = |c-b|$.

La lecture de cette liste doit se faire dans les deux sens. Dans un sens, on calcule le quotient et l'on en déduit la nature du triangle : c'est le cas des exercices de reconnaissance. Dans l'autre sens, on impose au quotient une valeur et l'on en déduit la position d'un point : c'est le cas des exercices de construction, où l'on cherche par exemple le point C tel que ABC soit rectangle isocèle en A , ce qui revient à écrire $c-a = i(b-a)$.

Un mot sur le cas dégénéré. Lorsque le quotient est **nul**, c'est que $c = a$, donc que les points A et C sont confondus, et il n'y a plus de triangle. C'est pourquoi l'énoncé exige que les trois points soient deux à deux distincts, et pourquoi la caractérisation de l'angle droit précise « imaginaire pur **non nul** ».

CE QU'IL FAUT RETENIR

Ensembles de points. Pour M d'affixe z , A d'affixe a et B d'affixe b (avec $A \neq B$) :

- **Cercle** de centre A et de rayon $R > 0$: $|z-a| = R$;
- **Médiatrice** de $[AB]$: $|z-a| = |z-b|$;
- **Demi-droite ouverte** d'origine O et d'angle α : $\arg(z) = \alpha + 2k\pi$, avec $z \neq 0$.

Le quotient $Z = \frac{z-a}{z-b}$ (**pour** $z \neq b$). Son module vaut $\frac{MA}{MB}$ et son argument est une mesure de $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA} \right)$. On en déduit trois ensembles classiques :

- $|Z| = 1 \iff MA = MB$: l'ensemble est la **médiatrice** de $[AB]$;
- Z **réel** $\iff M, A$ et B sont alignés : l'ensemble est la **droite** (AB) **privée de** B ;
- Z **imaginaire pur** $\iff M$ voit $[AB]$ sous un angle droit : l'ensemble est le **cercle de diamètre** $[AB]$ **privé de** A et de B .

Ce dernier bloc est le passage obligé de tous les problèmes de type baccalauréat sur les complexes. Retiens que la démarche est toujours la même en trois temps : nommer les points fixes A et B cachés dans l'écriture, traduire le module et l'argument de Z en distance et en angle, puis reconnaître la figure correspondante.

Les exclusions de points méritent une attention particulière, car elles font partie de la réponse attendue. Le point B est toujours exclu, puisque Z n'y est pas défini. Le point A donne $Z = 0$: ce nombre est réel, il appartient donc au deuxième ensemble, mais il n'a pas d'argument, il est donc exclu du troisième. C'est pourquoi la droite (AB) n'est privée que de B , alors que le cercle est privé des deux points.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Écritures complexes des transformations usuelles. Une transformation qui envoie le point $M(z)$ sur le point $M'(z')$ est décrite par une relation $z' = f(z)$, appelée son **écriture complexe**.

- **Translation** de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a : $z' = z + a$;
- **Rotation** de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α : $z' - \omega = e^{i\alpha} (z - \omega)$; si le centre est O : $z' = e^{i\alpha} z$;
- **Symétrie** d'axe l'axe des réels : $z' = \bar{z}$; d'axe l'axe des imaginaires : $z' = -\bar{z}$;
- **Symétrie** de centre O : $z' = -z$; de centre $\Omega(\omega)$: $z' = 2\omega - z$;
- **Homothétie** de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k réel non nul : $z' - \omega = k(z - \omega)$.

La symétrie de centre Ω est à la fois la rotation d'angle π et l'homothétie de rapport -1 de même centre. Translations, rotations et symétries **conservent les distances**.

Toutes ces écritures s'organisent autour d'une même idée, qu'il vaut mieux comprendre que mémoriser : on **ramène d'abord le centre à l'origine** en soustrayant ω , on effectue l'opération simple (multiplier par $e^{i\alpha}$ pour tourner, par k pour agrandir), puis on **remet le centre à sa place** en ajoutant ω . La formule de la rotation, $z' = \omega + e^{i\alpha}(z - \omega)$, n'est rien d'autre que ces trois gestes écrits à la suite.

C'est aussi ce qui explique la différence entre la translation et la rotation. La translation agit sur z par une addition, donc elle déplace tout le plan sans le tourner ; la rotation agit par une multiplication, donc elle tourne. La leçon 3 avait annoncé cette distinction en observant que l'addition et la multiplication ne se comportent pas de la même façon : on en voit ici la traduction géométrique complète.

Retiens enfin ce cas particulier, qui revient sans cesse : la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ correspond à la multiplication par i , et celle d'angle $-\frac{\pi}{2}$ à la multiplication par $-i$. Construire un carré ou un triangle rectangle isocèle revient donc, presque toujours, à multiplier une affixe de vecteur par i .

ATTENTION !

L'**ordre** compte : dans $\frac{c-a}{b-a}$, l'angle est mesuré **en** A (l'affixe soustraite), de $\overrightarrow{AB}$ **vers** $\overrightarrow{AC}$. Pour une rotation dont le centre Ω n'est pas l'origine, n'écris surtout pas $z' = e^{i\alpha} z$: la formule correcte est $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$, et l'oubli du centre est l'erreur la plus fréquente du chapitre. Enfin, un quotient **réel** traduit un alignement, un quotient **imaginaire pur** traduit un angle droit : ne les échange pas, la confusion coûte tout l'exercice.

MÉTHODE : ETUDIER UNE CONFIGURATION AVEC LE QUOTIENT

Étape 1 : Repère le sommet à étudier : c'est celui dont l'affixe sera soustraite au numérateur **et** au dénominateur.

Étape 2 : Calcule $\frac{c-a}{b-a}$ et mets le résultat sous forme algébrique, en multipliant par le conjugué du dénominateur.

Étape 3 : Lis le **module** : s'il vaut 1, alors $AC = AB$ et le triangle est isocèle en A .

Étape 4 : Lis la **nature** du nombre obtenu : réel donne trois points alignés, imaginaire pur donne un angle droit en A .

Étape 5 : Conclut par une phrase complète en citant la caractérisation utilisée, et non par le seul résultat du calcul.

Étape 6 : Si l'on te demande de **construire** un point plutôt que de reconnaître une figure, écris la condition à l'envers : par exemple $c-a = i(b-a)$ pour un triangle rectangle isocèle direct en A .

Exemple résolu 1 : reconnaître la nature d'un triangle

Enoncé. Les points A , B et C ont pour affixes $a = 1 + i$, $b = 4 + 2i$ et $c = 4i$. Détermine la nature du triangle ABC .

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On calcule d'abord les affixes des deux vecteurs issus de A , en soustrayant l'affixe de A à chaque fois.	$c-a = -1 + 3i$ et $b-a = 3 + i$.
On forme le quotient et l'on multiplie haut et bas par le conjugué du dénominateur pour le rendre réel.	$\frac{c-a}{b-a} = \frac{(-1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}$.
Le dénominateur vaut $9 + 1$, et le numérateur se développe en $-3 + i + 9i + 3$.	$\frac{c-a}{b-a} = \frac{10i}{10} = i$.
Le module du résultat vaut 1 : les deux côtés issus de A ont donc la même longueur.	$ i = 1$, donc $AC = AB$.
L'argument vaut $\frac{\pi}{2}$: l'angle orienté en A est droit.	$\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
On rassemble les deux informations en une conclusion rédigée.	Le triangle ABC est rectangle isocèle en A.

Vérification. Contrôlons par les longueurs. $AB = |3 + i| = \sqrt{10}$, $AC = |-1 + 3i| = \sqrt{10}$, et $BC = |4i - 4 - 2i| = |-4 + 2i| = \sqrt{20}$. On a bien $AB = AC$, et $AB^2 + AC^2 = 10 + 10 = 20 = BC^2$: la réciproque de Pythagore confirme l'angle droit en A .

Exemple résolu 2 : image d'un point par une rotation

Enoncé. Soit r la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. **1)** Donne l'écriture complexe de r . **2)** Détermine l'affixe de l'image du point M d'affixe $z = 3 + 2i$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On part de la formule générale de la rotation, en remplaçant l'angle par sa valeur ; $e^{i\pi/2}$ vaut i .	$z' - (1 + i) = i(z - (1 + i))$.
On peut développer pour obtenir une écriture de la forme $z' = \alpha z + \beta$, mais ce n'est pas obligatoire.	$z' = iz + 1 + i - i(1 + i) = iz + 2$.
Pour l'image de M , on commence par ramener le centre à l'origine en soustrayant ω .	$z - \omega = (3 + 2i) - (1 + i) = 2 + i$.
On effectue la rotation autour de l'origine en multipliant par i , ce qui échange et modifie les deux parties.	$i(2 + i) = 2i + i^2 = -1 + 2i$.
On remet enfin le centre à sa place en rajoutant ω .	$z' = (1 + i) + (-1 + 2i) = 3i$.

Vérification. Une rotation conserve les distances au centre : on doit avoir $\Omega M = \Omega M'$. Or $\Omega M = |2 + i| = \sqrt{5}$ et $\Omega M' = |3i - (1 + i)| = |-1 + 2i| = \sqrt{5}$. L'égalité est vérifiée. On peut aussi contrôler avec l'écriture développée : $i(3 + 2i) + 2 = 3i - 2 + 2 = 3i$, même résultat.

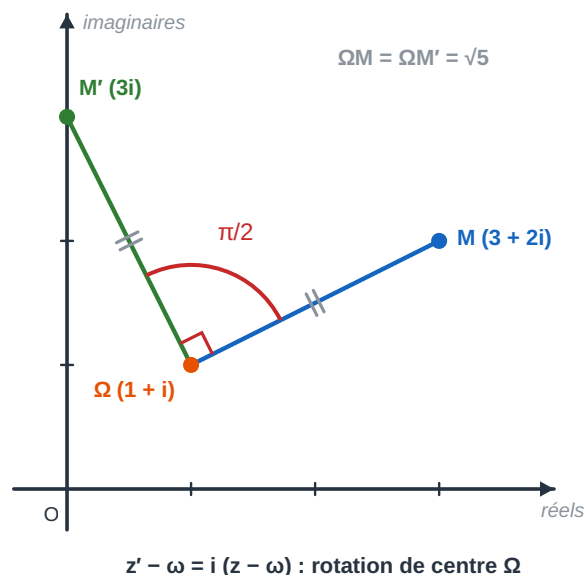


Figure 9. Rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$: le point tourne, la distance au centre ne change pas.

Exemple résolu 3 : construire un point à partir d'une condition

Énoncé. On donne A , B et C d'affixes $a = 2 + i$, $b = 4 + 3i$ et $c = 1 + 4i$. **1)** Détermine l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme. **2)** Détermine l'affixe du point E tel que le triangle ABE soit rectangle isocèle direct en A .

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Dans le parallélogramme $ABCD$, les côtés $[AB]$ et $[DC]$ sont parallèles et de même longueur : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont donc égaux.	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
On traduit cette égalité de vecteurs par une égalité d'affixes, chaque vecteur donnant « arrivée moins départ ».	$b - a = c - d$.
On isole d et l'on remplace par les valeurs numériques.	$d = a + c - b$, soit $d = (2 + i) + (1 + 4i) - (4 + 3i)$.
On effectue le calcul en regroupant les parties réelles et les parties imaginaires.	$d = -1 + 2i$.
Pour la question 2), « rectangle isocèle direct en A » signifie que $\overrightarrow{AE}$ s'obtient à partir de $\overrightarrow{AB}$ par un quart de tour direct, donc par une multiplication par i .	$e - a = i(b - a)$.
On calcule d'abord l'affixe de $\overrightarrow{AB}$, puis on la multiplie par i .	$b - a = 2 + 2i$; $i(2 + 2i) = -2 + 2i$.
On revient enfin à l'affixe du point en rajoutant celle de A .	$e = (2 + i) + (-2 + 2i) = 3i$.

Vérification. Pour 1), calculons $\overrightarrow{DC}$: son affixe est $(1 + 4i) - (-1 + 2i) = 2 + 2i$, qui est bien l'affixe de $\overrightarrow{AB}$. Pour 2), contrôlons les longueurs : $AB = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ et $AE = |-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$, elles sont égales, et le quotient $\frac{e - a}{b - a}$ vaut i , donc l'angle en A est bien droit.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). A tout complexe $z \neq i$ on associe $Z = \frac{z-2}{z-i}$. On note A le point d'affixe 2, B le point d'affixe i , et M le point d'affixe z . On cherche l'ensemble des points M tels que Z soit **imaginaire pur**.

Outil (la propriété que j'utilise). L'interprétation du module et de l'argument d'un quotient de différences d'affixes : $|Z| = \frac{MA}{MB}$ et $\arg(Z) = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA} \right) + 2k\pi$. Et la caractérisation des imaginaires purs par leur argument : Z non nul est imaginaire pur si et seulement si $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Conclusion (ce que j'en déduis). Dire que Z est imaginaire pur non nul, c'est dire que son argument vaut $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π . Par l'interprétation de l'argument, cela signifie que l'angle $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA} \right)$ est droit, c'est-à-dire que le point M **voit le segment $[AB]$ sous un angle droit**. Or l'ensemble des points d'où l'on voit un segment sous un angle droit est le **cercle de diamètre $[AB]$** , propriété connue depuis la classe de troisième. L'ensemble cherché est donc ce cercle, **privé de A** (où $Z = 0$, qui n'a pas d'argument) et **privé de B** (où Z n'est pas défini).

Rédaction type. « On sait que $\arg(Z)$ mesure l'angle $\left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA} \right)$ (propriété). Or Z est imaginaire pur non nul si et seulement si cet argument vaut $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (caractérisation). Donc M voit $[AB]$ sous un angle droit, et l'ensemble cherché est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B (conclusion). »

Quel type de raisonnement ? C'est une **équivalence** : chaque étape du raisonnement est réversible, ce qui est indispensable ici, puisqu'on cherche **tous** les points et **seulement** ceux-là. Si l'on n'avait démontré qu'une implication, on aurait obtenu un ensemble contenant la réponse, sans certitude qu'il lui soit égal. Vérifie toujours, dans ce type d'exercice, que tes équivalences sont bien des équivalences, et n'oublie pas les points exclus : ils font partie de la réponse.

À TOI DE JOUER !

Exercice 11. A, B, C ont pour affixes $1 + i, 3 + 2i$ et $-1 + 5i$. Calcule $\frac{c-a}{b-a}$ et déduis-en la nature du triangle ABC .

Exercice 12. Donne l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(2 - i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis calcule l'affixe de l'image du point $M(4)$.

AUTO-EVALUATION : Test de fin de chapitre

1 point par question. Corrigés en fin de chapitre.

1. Donne $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ pour $z = 4 - 7i$.
2. Calcule $(1 - i)(2 + 3i)$.
3. Donne le conjugué de $z = -3 + 5i$.

4. Mets $\frac{2}{3-i}$ sous forme algébrique.
5. Calcule $|5 + 12i|$.
6. Calcule la distance entre les points d'affixes $1 + i$ et $4 + 5i$.
7. Donne le module et un argument de $z = -2$.
8. Ecris $1 - i$ sous forme exponentielle.
9. Donne un argument de i .
10. Avec $z = 3e^{i\pi/5}$ et $z' = 2e^{i\pi/10}$, donne le module et un argument de zz' .
11. Calcule $\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^3$.
12. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^2 = -9$.
13. Résous dans $\mathbb{C}$: $z^2 - 2z + 5 = 0$.
14. Vrai ou faux : « $|z + z'| = |z| + |z'|$ pour tous complexes ». Justifie.
15. Calcule $i^2 + i^3 + i^4$.
16. Calcule $|(1 + i)^{10}|$.
17. Donne l'écriture complexe de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis l'image du point d'affixe $3 + i$.
18. Les points A, B, C d'affixes a, b, c vérifient : $\frac{c-a}{b-a}$ est réel. Que peux-tu en conclure ?
19. Combien l'équation $z^5 = w$, avec w non nul, a-t-elle de solutions dans $\mathbb{C}$?
20. Donne l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α .
21. Transforme $\cos(5x) + \cos(3x)$ en produit.
22. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1| = |z - i|$?

JE M'EXERCE

Exercices classés par leçon, de difficulté croissante. Corrigés des exercices impairs en fin de chapitre.

Leçon 1 : Forme algébrique et conjugué

Exercice 13. Mets sous forme algébrique : **a)** $(2 + i) + (3 - 4i)$; **b)** $(5 - 2i) - (1 - 6i)$; **c)** $3(1 + 2i) - 2(4 - i)$.

Exercice 14. Calcule : **a)** $(1 + i)(1 - i)$; **b)** $(2 + 3i)^2$; **c)** $(1 - 2i)(3 + i)$.

Exercice 15. Mets sous forme algébrique : **a)** $\frac{1}{2+i}$; **b)** $\frac{3-i}{1+i}$; **c)** $\frac{2+i}{2-i}$.

Exercice 16. Calcule i^{15} , i^{20} et i^{2026} .

Exercice 17. Détermine les réels x et y tels que $(x + iy)(1 + i) = 3 - i$.

Exercice 18. Soit $z = 2 - 5i$. Calcule $z + \bar{z}$, $z - \bar{z}$ et $z\bar{z}$.

Exercice 19. Montre que, pour tout complexe z , le nombre $z\bar{z}$ est un réel positif.

Exercice 20. Détermine l'ensemble des complexes z tels que z^2 soit un réel.

Leçon 2 : Représentation et module

Exercice 21. Place les points d'affixes $3 + i$, $-2 + 2i$, $-1 - 3i$, $2i$, et calcule leurs modules.

Exercice 22. A, B, C ont pour affixes $1 + i, 4 + 5i, -2 + 4i$. Calcule AB, BC, AC ; le triangle ABC est-il isocèle ?

Exercice 23. Calcule : **a)** $|3 - 4i|$; **b)** $|(2 + i)(1 - i)|$; **c)** $\left| \frac{3 + 4i}{1 - i} \right|$.

Exercice 24. Détermine et décris l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 2| = 3$.

Exercice 25. Détermine et décris l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - i| = |z + 1|$.

Exercice 26. Soit z tel que $|z| = 1$. Montre que $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

Leçon 3 : Argument et formes

Exercice 27. Ecris sous forme trigonométrique : **a)** $z = \sqrt{3} + i$; **b)** $z = -1 - i$; **c)** $z = -2i$.

Exercice 28. Ecris sous forme exponentielle : **a)** $z = 4$; **b)** $z = -3$; **c)** $z = 1 - i$.

Exercice 29. On donne $z = 2e^{i\pi/3}$ et $z' = 4e^{-i\pi/6}$. Donne, sous forme exponentielle, zz' , $\frac{z}{z'}$ et $\bar{z}$.

Exercice 30. Donne le module et un argument de $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$.

Exercice 31. Détermine et décris l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Exercice 32. Soit $z = 1 + i$. Calcule le module et un argument de z , puis ceux de z^3 avec les propriétés de l'argument.

Leçon 4 : Moivre et Euler

Exercice 33. Calcule à l'aide de Moivre : **a)** $(1 + i)^8$; **b)** $(\sqrt{3} + i)^6$.

Exercice 34. Calcule $\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^6$.

Exercice 35. Linéarise $\cos^3 \theta$ à l'aide des formules d'Euler.

Exercice 36. A l'aide de Moivre appliqué à $(\cos \theta + i \sin \theta)^2$, retrouve $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

Exercice 37. A l'aide des formules d'Euler, transforme en somme : **a)** $\cos(3x) \cos x$; **b)** $\sin(2x) \cos x$.

Exercice 38. Montre que $\cos(3x) + \cos x = 2 \cos(2x) \cos x$, puis transforme de même $\sin(3x) + \sin x$ en produit.

Leçon 5 : Equations

Exercice 39. Résous dans $\mathbb{C}$: **a)** $z^2 = -25$; **b)** $z^2 + 9 = 0$.

Exercice 40. Résous dans $\mathbb{C}$: **a)** $z^2 - 6z + 10 = 0$; **b)** $z^2 + 4z + 5 = 0$.

Exercice 41. Résous dans $\mathbb{C}$: $2z^2 - 2z + 1 = 0$.

Exercice 42. Soit $P(z) = z^2 - 2z + 2$. Résous $P(z) = 0$ et vérifie que les racines sont conjuguées.

Exercice 43. **a)** Détermine les racines carrées du nombre complexe $8 + 6i$. **b)** Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$.

Exercice 44. On considère l'équation $z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i = 0$. **a)** Montre qu'elle admet une solution imaginaire pure z_0 , que l'on déterminera. **b)** Détermine les nombres complexes p et q tels que, pour tout z : $z^3 - (2 + 2i)z^2 + (2 + 4i)z - 4i = (z - z_0)(z^2 + pz + q)$. **c)** Achève la résolution de l'équation.

Leçon 6 : Géométrie du plan

Exercice 45. Détermine et décris l'ensemble des points M d'affixe z tels que : **a)** $|z - 3i| = 2$; **b)** $|z - 1 - i| = |z - 3|$.

Exercice 46. Montre que les points d'affixes $1 + i$, $3 + 2i$ et $7 + 4i$ sont alignés.

Exercice 47. A , B , C ont pour affixes -1 , 1 et $i\sqrt{3}$. Calcule AB , AC et BC , puis précise la nature du triangle ABC .

Exercice 48. Donne l'écriture complexe de : **a)** la translation de vecteur d'affixe $3 - 2i$; **b)** la symétrie de centre $\Omega(1 + i)$; **c)** la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Exercice 49. Détermine l'affixe de l'image du point $A(2 + i)$ par la rotation de centre $\Omega(1 + 2i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, puis l'affixe de l'image du point obtenu par la translation de vecteur d'affixe -2 .

Exercice 50. A tout $z \neq -1$, on associe $Z = \frac{z - i}{z + 1}$; on note $A(i)$, $B(-1)$ et $M(z)$. Détermine l'ensemble des points M tels que : **a)** $|Z| = 1$; **b)** Z soit réel ; **c)** Z soit imaginaire pur.

J'APPROFONDIS

Exercices combinant plusieurs leçons. Corrigés des exercices impairs en fin de chapitre.

Exercice 51. Soit $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$. **a)** Mets z sous forme algébrique. **b)** Donne son module et un argument. **c)** Déduis-en z^{12} .

Exercice 52. Soit A , B , C les points d'affixes 2 , $2i$ et -2 . **a)** Place-les. **b)** Montre que le triangle ABC est rectangle isocèle. **c)** Détermine l'affixe du quatrième sommet D du carré $ABCD$ (sens à préciser).

Exercice 53. On pose $z_k = 2e^{2ik\pi/3}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$. **a)** Calcule les modules. **b)** Montre que les images forment un triangle équilatéral. **c)** Calcule la longueur d'un côté.

Exercice 54 (Maths et vie quotidienne (Bobo-Dioulasso)). Sur une carte de Bobo munie d'un repère (unité : le km), trois châteaux d'eau ont pour affixes $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 5 + 2i$, $z_C = 3 + 5i$. **a)** Calcule AB , BC , AC . **b)** Le triangle est-il isocèle ?

Exercice 55 (Maths et vie quotidienne (Banfora)). Un panneau solaire orientable est repéré par l'affixe $z = e^{i\theta}$ d'un point de son bord, le centre étant à l'origine. **a)** Quel est $|z|$? **b)** Lorsqu'il tourne de $\frac{\pi}{6}$, par quelle opération sur z passe-t-on de la position initiale à la nouvelle ?

Exercice 56 (J'écris et j'explique). Explique, avec un exemple chiffré, pourquoi multiplier un complexe par $e^{i\alpha}$ revient à **faire tourner** son image autour de O d'un angle α .

Exercice 57 (J'écris et j'explique). Explique pourquoi un nombre complexe et son conjugué ont **le même module** mais des **arguments opposés**, en t'appuyant sur la position de leurs images dans le plan.

Exercice 58. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et A , B les points d'affixes 2 et $2i$. **a)** Donne l'écriture complexe de r et vérifie que $r(A) = B$. **b)** Soit M un point d'affixe $z \neq 0$ et $M' = r(M)$. Justifie que le triangle OMM' est rectangle isocèle en O . **c)** Détermine l'ensemble des points $M(z)$ tels que M' appartienne à l'axe des réels.

SITUATIONS D'INTÉGRATION

Compétence visée : résoudre, dans des situations de repérage, de dimensionnement et de manœuvre issues de la vie professionnelle, des problèmes mobilisant les nombres complexes et leur interprétation géométrique.

Ressources mobilisées : affixe d'un point et d'un vecteur ; module et distance ; argument et direction ; formes trigonométrique et exponentielle ; ensembles de points (médiatrice, cercle) ; écriture complexe d'une rotation.

Moment d'évaluation : à la fin du chapitre, une fois la leçon 6 traitée. Corrigés-types et grille de correction en fin de chapitre.

Situation d'intégration 1 : Le réseau électrique de Koudougou. A Koudougou, la société d'électricité exploite trois postes de transformation repérés sur le plan du réseau, gradué en kilomètres : $A(2; 1)$, $B(6; 1)$ et $C(4; 4)$. Le chef de secteur doit implanter un quatrième poste D à égale distance des postes A et B , puis relier D à C par un câble souterrain. Le magasin ne détient plus que 4 km de câble ; le devis mentionne un prix de 850 000 FCFA le kilomètre et une équipe de six techniciens. Le chef de secteur te soumet son plan : indique-lui toutes les positions possibles pour D , puis dis-lui lesquelles il peut retenir sans commander de câble supplémentaire.

Situation d'intégration 2 : L'antenne de Bobo-Dioulasso. A Bobo-Dioulasso, l'antenne relais porte un bras rigide de 3 m qui pivote autour du point O ; ce matin, la pointe du bras fait un angle de $\frac{\pi}{6}$ avec la direction horizontale. La maintenance prévoit deux manœuvres successives : une rotation de $\frac{\pi}{3}$ dans le sens direct, puis un demi-tour. Le règlement de sécurité impose que la pointe reste toujours à plus de 2 m du mât et qu'elle ne descende jamais au-dessous du plancher technique, situé 2 m sous O . Le mât culmine à 45 m et l'antenne émet sur 98,4 MHz. Le technicien te demande si les deux manœuvres prévues respectent le règlement.

Situation d'intégration 3 : Le pont de Bagré. Sur la retenue de Bagré, deux piliers du futur pont sont repérés par $A(1; 1)$ et $B(5; 5)$ sur la carte du chantier, graduée en kilomètres. La brigade fluviale veut poser une balise de secours au milieu du segment $[AB]$, à condition qu'elle reste à moins de 3 km de chacun des deux piliers, et elle doit par ailleurs indiquer aux piroguiers la direction à suivre pour aller de A vers B . Le barrage produit 16 mégawatts et sa retenue couvre 255 km². Le chef de brigade te transmet la carte : dis-lui si la balise peut être posée au milieu comme prévu et quel cap donner aux piroguiers. (On donne $\sqrt{2} \approx 1,414$.)

Situation d'intégration 4 : Le verger d'Orodara. A Orodara, un bras d'arrosage de 20 m pivote autour du point O et arrose tout ce qu'il balaie. Trois jeunes manguiers viennent d'être plantés en $P(12; 16)$, $Q(18; 12)$ et $R(6; 8)$, coordonnées en mètres. Le verger compte 240 manguiers et la pompe débite 6 m³ par heure. Aide Awa à décider lesquels des trois jeunes plants sont arrosés, et à proposer un emplacement pour un quatrième plant qui serait arrosé tout juste, à la limite du bras.

Situation d'intégration 5 : Les mines de Houndé. A Houndé, trois puits d'exploration ont été ouverts à 2 km du camp de base, dans les directions repérées par les angles 0, $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ à partir de l'axe des abscisses. La mine a produit 5,4 tonnes d'or l'an dernier et l'équipe compte douze foreurs. Le géologue envisage de desservir les trois puits par une piste circulaire unique centrée sur le camp, plutôt que par trois

pistes droites partant du camp. Il te soumet ses relevés : dis-lui si la piste circulaire est géométriquement possible, et laquelle des deux solutions représente le moins de kilomètres à ouvrir. (On donne $\pi \approx 3,14$.)

Situation d'intégration 6 : L'oignon de Ouahigouya. A Ouahigouya, deux silos à oignons occupent les points $S_1(3; 1)$ et $S_2(3; 5)$ sur le plan du magasin, gradué en décamètres. La coopérative veut construire un troisième silo T tel que le triangle S_1S_2T soit rectangle et isocèle en S_1 , afin que les deux tapis convoyeurs partant de S_1 soient perpendiculaires et de même longueur. Le seul terrain disponible se trouve à l'est du magasin. La coopérative a stocké 180 tonnes d'oignons l'an dernier et chaque silo mesure 6 m de haut. Pour départager les emplacements, détermine-les tous, puis indique à la coopérative celui qu'elle doit retenir et la longueur des tapis à commander.

Situation d'intégration 7 : La centrale solaire de Zagtouli. A Zagtouli, près de Ouagadougou, la grande centrale solaire (environ 130 000 modules pour une puissance de 33 mégawatts) doit réorienter une rangée de panneaux. Sur le plan du chantier, gradué en décamètres, le mât de commande occupe le point $\Omega(2; 1)$ et le point d'ancrage du panneau occupe le point $A(5; 1)$; la manœuvre prévue est une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$. La zone de manœuvre balisée est un carré de 6 dam de côté, centré sur Ω et dont les côtés sont parallèles aux axes. Le chef de chantier te transmet le plan : dis-lui où arrive le point d'ancrage et si la manœuvre peut être conduite sans que le panneau sorte de la zone balisée.

TROUVE L'ERREUR

Analyser une solution fautive fait progresser : repère l'erreur, explique-la, puis corrige.

Ce qu'on écrit (X faux)	Pourquoi c'est faux, et la correction
$\sqrt{-4} \sqrt{-9} = \sqrt{36} = 6$	La règle $\sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ est fautive pour les négatifs. On écrit $z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm 2i$; on ne manipule pas $\sqrt{-4}$.
$ 2 + 3i = 2 + 3 = 5$	Le module n'est pas la somme des parties : $ 2 + 3i = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.
Le conjugué de $3 - 5i$ est $-3 + 5i$	On change le signe de la seule partie imaginaire : $\overline{3 - 5i} = 3 + 5i$.
$\arg(\bar{z}) = \arg(z)$	L'image de $\bar{z}$ est le symétrique de celle de z par rapport à l'axe des réels : $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.
$(e^{i\theta})^3 = e^{i \cdot 3} = e^{3i}$	L'exposant porte sur tout $i\theta$: $(e^{i\theta})^3 = e^{3i\theta}$; l'argument est 3θ , pas 3.
$\text{Im}(4 - 7i) = -7i$	La partie imaginaire est un réel : $\text{Im}(4 - 7i) = -7$, sans le i .
$z^3 = 8$ donc $z = 2$	Une équation $z^n = w$ a exactement n solutions dans $\mathbb{C}$. Ici il en manque deux : $2e^{2i\pi/3}$ et $2e^{4i\pi/3}$.
$z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0$: les racines sont conjuguées	La propriété « racines conjuguées » exige des coefficients réels . Ici les racines sont 2 et $1 + i$, qui ne sont pas conjuguées.
Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α : $z' = e^{i\alpha}z$	Cette écriture ne vaut que si le centre est O . En général : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.
$\frac{c - a}{b - a}$ est imaginaire pur, donc A, B, C sont alignés	C'est un quotient réel qui traduit l'alignement ; imaginaire pur signifie $(AB) \perp (AC)$: angle droit en A .

BANQUE D'EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercices d'entraînement complémentaires. Les exercices guidés (G) sont fournis avec leur correction ; les fiches sont auto-correctives ; les exercices E sont à chercher seul.

Exercices guidés (avec correction)

Série 1 : Forme algébrique

Exercice G1. Calcule les sommes et produits suivants : **a)** $(3 + 2i) + (1 + 5i)$; **b)** $(4 - i) - (2 + 3i)$; **c)** $(2 + i)^2$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Correction. **a)** $4 + 7i$; **b)** $2 - 4i$; **c)** $3 + 4i$.

Exercice G2. Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de : **a)** $z = (3 + 2i)(1 - i)$; **b)** $z = \frac{2 + i}{1 + i}$.

Guide : **a)** développe d'abord le produit ; **b)** multiplie numérateur et dénominateur par le conjugué de $1 + i$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Correction. **a)** $z = 5 - i$, donc $\operatorname{Re}(z) = 5$, $\operatorname{Im}(z) = -1$. **b)** $z = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$, donc $\operatorname{Re}(z) = \frac{3}{2}$, $\operatorname{Im}(z) = -\frac{1}{2}$.

Série 2 : Module et argument

Exercice G3. Calcule le module des nombres complexes : **a)** $z_1 = 3 + 4i$; **b)** $z_2 = -5 + 12i$; **c)** $z_3 = 1 - i$; **d)** $z_4 = 2i$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Correction. **a)** $|z_1| = 5$; **b)** $|z_2| = 13$; **c)** $|z_3| = \sqrt{2}$; **d)** $|z_4| = 2$.

Exercice G4. Ecris sous forme trigonométrique puis exponentielle : **a)** $z = 1 + i\sqrt{3}$; **b)** $z = -1 + i$.

Guide : calcule le module, détermine l'argument avec $\cos \theta$ et $\sin \theta$, puis écris

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}.$$

CE QU'IL FAUT RETENIR

Correction. **a)** $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\pi/3}$; **b)** $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{3i\pi/4}$.

Série 3 : Equations

Exercice G5. Résous dans $\mathbb{C}$: **a)** $z^2 - 6z + 25 = 0$; **b)** $z^3 = -8$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Correction. a) $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 3 - 4i$. b) $z^3 = -8 = 8e^{i\pi}$ donne trois solutions :
 $z_0 = 2e^{i\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$; $z_1 = 2e^{i\pi} = -2$; $z_2 = 2e^{5i\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}$.

Série 4 : En contexte

Exercice G6 (Le partage de terrain (Bobo-Dioulasso)). Fatou veut partager un terrain carré de 100 m^2 en 4 parties égales pour ses 4 enfants. a) Quelle est la longueur du côté du terrain ? b) On représente le terrain dans le plan complexe, un sommet à l'origine et un côté le long de l'axe réel positif : quelles sont les affixes des 4 sommets ? c) Quelle est l'affixe du centre du terrain ?

CE QU'IL FAUT RETENIR

Correction. a) $x^2 = 100$ donc $x = 10 \text{ m}$. b) 0, 10, $10 + 10i$, $10i$. c)

$$z_{\text{centre}} = \frac{0 + 10 + (10 + 10i) + 10i}{4} = 5 + 5i.$$

Exercice G7 (La rotation du moulin). Un moulin à vent a 4 pales disposées à 90° les unes des autres. Une pale est à la position d'affixe $z = 2$. a) Quelles sont les affixes des 3 autres pales ? b) Après une rotation de $\frac{\pi}{4}$, quelle est la nouvelle affixe de la première pale ?

CE QU'IL FAUT RETENIR

Correction. a) Rotations successives de $\frac{\pi}{2}$: $z_2 = 2e^{i\pi/2} = 2i$; $z_3 = 2e^{i\pi} = -2$;
 $z_4 = 2e^{3i\pi/2} = -2i$. b) $z' = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2}(1 + i)$.

Fiches auto-correctives

Fiche 1 : Opérations de base

Exercice	Solution
Calcule : $(5 + 3i) + (2 - 4i)$	$7 - i$
Calcule : $(2 + i)(3 - 2i)$	$8 - i$
Calcule : $\frac{4 + 2i}{1 - i}$	$1 + 3i$

Fiche 2 : Module et argument

Exercice	Solution
Calcule le module de $z = -3 + 4i$	5
Détermine un argument de $z = -1 - i$	$-\frac{3\pi}{4}$ (ou $\frac{5\pi}{4}$)

Fiche 3 : Formule de Moivre

Exercice	Solution
Calcule $(1 + i)^4$	-4
Calcule $\left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^6$	1

Exerce-toi

Exercice E1. Calcule et simplifie : **a)** $(3 + 2i) + (5 - 4i)$; **b)** $(7 - 3i) - (2 + 5i)$; **c)** $(4 + i)(2 - 3i)$; **d)** $\frac{6 + 2i}{1 + i}$.

Exercice E2. Détermine la partie réelle et la partie imaginaire de : **a)** $z_1 = 5 + 7i$; **b)** $z_2 = -3 - 2i$; **c)** $z_3 = 4i$; **d)** $z_4 = -6$.

Exercice E3. Ecris sous forme trigonométrique : **a)** $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$; **b)** $z_2 = 2$; **c)** $z_3 = -3i$.

Exercice E4. Ecris sous forme exponentielle : **a)** $z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$; **b)** $z_2 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$; **c)** $z_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Exercice E5. Résous dans $\mathbb{C}$: **a)** $z^2 + 1 = 0$; **b)** $z^2 - 4z + 5 = 0$; **c)** $z^2 + 2z + 2 = 0$; **d)** $z^2 - 6z + 13 = 0$.

Exercice E6. Calcule à l'aide de la formule de Moivre : **a)** $(\sqrt{3} + i)^4$; **b)** $\left(\frac{1 - i}{2}\right)^8$.

Exercice E7. Linéarise : **a)** $\sin^3 x$; **b)** $\cos^2 x \sin^2 x$.

Exercice E8. Dans le plan complexe, on considère les points $A(2 + i)$, $B(4 + 3i)$ et $C(1 + 4i)$. **a)** Place ces points. **b)** Calcule l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$. **c)** Calcule AB . **d)** Détermine l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice E9. On considère $z = 1 + i\sqrt{3}$. **a)** Calcule le module et un argument de z . **b)** Ecris z sous forme exponentielle. **c)** Calcule z^3 et z^{10} . **d)** Détermine les racines cubiques de z .

BILAN DU CHAPITRE

Mots-clés :

- i : nombre tel que $i^2 = -1$ (Leçon 1).
- **Forme algébrique** : $z = a + bi$; partie réelle a , partie imaginaire b (Leçon 1).
- **Identification** : $a + bi = a' + b'i \iff a = a'$ et $b = b'$ (Leçon 1).
- **Conjugué** : $\bar{z} = a - bi$ (Leçon 1).
- **Affixe / image** : correspondance entre z et le point $M(a; b)$ (Leçon 2).
- **Module** : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = OM$ (Leçon 2).
- **Argument** : θ tel que $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, défini modulo 2π (Leçon 3).
- **Forme exponentielle** : $z = r e^{i\theta}$ (Leçon 3).
- **Moivre / Euler** : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$; $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ (Leçon 4).
- **Linéarisation** : transformer $\cos^n \theta$ en somme de $\cos(k\theta)$ (Leçon 4).
- **Racine carrée d'un complexe** : δ tel que $\delta^2 = \Delta$ (Leçon 5).
- **Racines n -ièmes** : les n solutions de $z^n = w$, régulièrement réparties sur un cercle (Leçon 5).
- **Ecriture complexe** : relation $z' = f(z)$ traduisant une transformation du plan ; translation $z' = z + a$, rotation $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$ (Leçon 6).

CE QU'IL FAUT RETENIR

- Tout complexe s'écrit $z = a + bi$; on calcule comme dans $\mathbb{R}$ en remplaçant i^2 par -1 ; pour un quotient, on multiplie par le **conjugué** du dénominateur. L'unicité de cette écriture autorise l'**identification** des parties réelles et imaginaires.
- Le **module** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ mesure OM ; la distance de deux points est $|z_B - z_A|$; $|z|^2 = z\bar{z}$, d'où $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.
- Tout complexe non nul s'écrit $r e^{i\theta}$: multiplier **multiplie les modules** et **ajoute les arguments** ; multiplier par $e^{i\alpha}$, c'est **tourner** de α .
- **Moivre** : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$; **Euler** permet de **linéariser**, de transformer un produit en somme et une somme en produit.
- Un trinôme réel à $\Delta < 0$ a deux racines **conjuguées** ; à coefficients complexes, on passe par une racine carrée δ de Δ . L'équation $z^n = w$ a exactement n solutions.
- Le quotient $\frac{c-a}{b-a}$ dit tout de la configuration : son module vaut $\frac{AC}{AB}$, son argument mesure $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$; réel $\iff$ points alignés, imaginaire pur $\iff$ angle droit en A .
- Translation : $z' = z + a$; rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$; ces transformations conservent les distances.

FICHE DE RÉVISION

Tout le chapitre en bref. A relire avant un devoir.

Calculer dans $\mathbb{C}$. $i^2 = -1$; $z = a + bi$; $\bar{z} = a - bi$; $z\bar{z} = a^2 + b^2$. Quotient : multiplier par le conjugué du dénominateur. i^n se répète de 4 en 4. Identification : $a + bi = a' + b'i \iff a = a'$ et $b = b'$.

Module. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$; $|zz'| = |z||z'|$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $|z^n| = |z|^n$; $AB = |z_B - z_A|$;
 $|z + z'| \leq |z| + |z'|$; $|z|^2 = z\bar{z}$ et $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

Formes. $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}$ avec $r = |z|$, $\cos \theta = \frac{a}{r}$, $\sin \theta = \frac{b}{r}$.

$\arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2k\pi$; $\arg(\bar{z}) = -\arg z + 2k\pi$; $\arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Arguments remarquables : r donne 0, $-r$ donne π , ri donne $\frac{\pi}{2}$, $-ri$ donne $-\frac{\pi}{2}$.

Moivre / Euler. $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$; $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$; $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Produits et sommes. $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$; $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$;
 $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$.

Second degré réel ($\Delta < 0$). $z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$: deux racines conjuguées.

Racines carrées, coefficients complexes. $z^2 = A$: système $x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(A)$, $x^2 + y^2 = |A|$, $2xy = \operatorname{Im}(A)$; puis $z = \frac{-b \pm \delta}{2a}$ avec $\delta^2 = \Delta$.

Racines n -ièmes. $z^n = r e^{i\theta}$ a n solutions $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$, k de 0 à $n-1$: polygone régulier de centre O .

Degrés 3 et 4. Bicarrée : poser $Z = z^2$. Degré 3 avec racine z_0 indiquée : factoriser en $(z - z_0)(z^2 + pz + q)$ et identifier.

Géométrie. $\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = \frac{AC}{AB}$; $\arg \frac{c-a}{b-a} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right)$; réel $\iff$ alignés ; imaginaire pur $\iff$ angle droit en A ; cercle : $|z - z_A| = R$; médiatrice : $|z - z_A| = |z - z_B|$; demi-droite : $\arg z = \alpha + 2k\pi$.

Le quotient $Z = \frac{z-a}{z-b}$. $|Z| = 1$ donne la médiatrice de $[AB]$; Z réel donne la droite (AB) privée de B ; Z imaginaire pur donne le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B .

Transformations. Translation : $z' = z + a$; rotation : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$; symétrie de centre Ω : $z' = 2\omega - z$; symétrie d'axe des réels : $z' = \bar{z}$; homothétie : $z' - \omega = k(z - \omega)$. Parallélogramme $ABCD$: $z_D = z_A + z_C - z_B$.

VERS LE BAC

Exercice 59 (Type BAC). Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. On pose

$$z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}.$$

a) Mets z sous forme algébrique. **b)** Détermine le module et un argument de $1 + i\sqrt{3}$ et de $1 - i$. **c)** Déduis-en le module et un argument de z . **d)** Calcule z^{12} .

Exercice 60 (Type BAC). On considère l'équation (E) : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.

a) Résous (E) dans $\mathbb{C}$. **b)** Ecris les solutions sous forme exponentielle. **c)** Place les images des solutions et montre qu'elles sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

Exercice 61 (Type BAC). A tout nombre complexe $z \neq 2i$, on associe $Z = \frac{z-4}{z-2i}$. On note A et B les points d'affixes 4 et $2i$, et M le point d'affixe z .

a) Calcule Z pour $z = 4 + 2i$ et donne sa forme algébrique. **b)** Interprète géométriquement $|Z|$ et $\arg Z$. **c)** Détermine l'ensemble E_1 des points M tels que $|Z| = 1$. **d)** Détermine l'ensemble E_2 des points M tels que Z soit imaginaire pur.

CORRIGES

Corrigés des prérequis

P1. $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

P2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

P3. $\Delta = 4 - 20 = -16 < 0$: aucune solution dans $\mathbb{R}$ (on les trouvera dans $\mathbb{C}$ à la Leçon 5).

P4. $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Corrigés « A toi de jouer ! »

1. a) $4 + 3i$; b) $(2 + i)(3 - i) = 6 - 2i + 3i + 1 = 7 + i$.
2. $\frac{3 + 2i}{1 - i} = \frac{(3 + 2i)(1 + i)}{2} = \frac{1 + 5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$; $\text{Re} = \frac{1}{2}$, $\text{Im} = \frac{5}{2}$.
3. $|1 + i| = \sqrt{2}$; $|-2 + i| = \sqrt{5}$; $|-3i| = 3$.
4. $AB = |(-1 + 3i) - (2 - i)| = |-3 + 4i| = 5$.
5. a) $1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$. b) $-1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 e^{2i\pi/3}$.
6. $z z'$: module 6, argument $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$. $\frac{z}{z'}$: module $\frac{2}{3}$, argument $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$.
7. $(1 + i)^6 = (\sqrt{2})^6 e^{i \cdot 6 \cdot \pi/4} = 8 e^{3i\pi/2} = 8 \times (-i) = -8i$.
8. $\sin^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}}{-4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\theta)$.
9. a) $z = \pm 4i$; b) $\Delta = -3$, $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.
10. $\Delta = 16 - 52 = -36$; $z = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i$: conjuguées ✓.
11. $\frac{c - a}{b - a} = \frac{-2 + 4i}{2 + i} = \frac{(-2 + 4i)(2 - i)}{5} = \frac{10i}{5} = 2i$: imaginaire pur, donc angle droit en A ; $|2i| = 2$ donne $AC = 2AB$. Le triangle ABC est **rectangle en A** (non isocèle).
12. $z' = (2 - i) + i(z - (2 - i)) = iz + 1 - 3i$; pour $z = 4$: $z' = 4i + 1 - 3i = 1 + i$.

Corrigés de l'auto-évaluation

1. $\text{Re} = 4$, $\text{Im} = -7$. 2. $5 + i$. 3. $-3 - 5i$. 4. $\frac{2(3 + i)}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$. 5. $\sqrt{25 + 144} = 13$. 6. $|3 + 4i| = 5$.
7. module 2, argument π . 8. $\sqrt{2} e^{-i\pi/4}$. 9. $\frac{\pi}{2}$. 10. module 6, argument $\frac{\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{3\pi}{10}$. 11. $(e^{i\pi/6})^3 = e^{i\pi/2} = i$. 12. $z = \pm 3i$. 13. $z = 1 \pm 2i$. 14. **Faux** : pour $z = 1$, $z' = -1$, $|z + z'| = 0 \neq |z| + |z'| = 2$; on a seulement $\leq$. 15. $-1 - i + 1 = -i$. 16. $|1 + i|^{10} = (\sqrt{2})^{10} = 32$. 17. $z' = iz$; image : $i(3 + i) = -1 + 3i$. 18. A , B et C sont alignés. 19. Exactement **cinq** solutions. 20. $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$. 21. $\cos(5x) + \cos(3x) = 2 \cos(4x) \cos x$. 22. La **médiatrice** du segment joignant les points d'affixes 1 et i .

Corrigés « Je m'exerce » (exercices impairs)

13. a) $5 - 3i$; b) $4 + 4i$; c) $3 + 6i - 8 + 2i = -5 + 8i$.
15. a) $\frac{2 - i}{5} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$; b) $\frac{(3 - i)(1 - i)}{2} = \frac{2 - 4i}{2} = 1 - 2i$; c) $\frac{(2 + i)^2}{5} = \frac{3 + 4i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$.
17. $(x + iy)(1 + i) = (x - y) + (x + y)i = 3 - i \Rightarrow x - y = 3, x + y = -1 \Rightarrow x = 1, y = -2$.
19. $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$: réel positif.
21. $|3 + i| = \sqrt{10}$; $|-2 + 2i| = 2\sqrt{2}$; $|-1 - 3i| = \sqrt{10}$; $|2i| = 2$.
23. a) 5 ; b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{10}$; c) $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.
25. $|z - i| = |z + 1|$: ensemble des points équidistants des points d'affixes i et -1 , c'est la **médiatrice** du segment qui les joint.

27. a) $2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$; b) $\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right)$; c) $2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right)$.

29. $z z' = 8 e^{i\pi/6}$; $\frac{z}{z'} = \frac{1}{2} e^{i\pi/2}$; $\bar{z} = 2 e^{-i\pi/3}$.

31. $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$: c'est la **demi-droite ouverte** issue de O , d'angle $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des réels (sans O).

33. a) $(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 e^{i \cdot 8 \cdot \pi/4} = 16 e^{2i\pi} = 16$; b) $(\sqrt{3}+i)^6 = 2^6 e^{i \cdot 6 \cdot \pi/6} = 64 e^{i\pi} = -64$.

35. $\cos^3 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (e^{3i\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos(3\theta)$.

37. a)

$$\cos(3x) \cos x = \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} \cdot \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{e^{4ix} + e^{2ix} + e^{-2ix} + e^{-4ix}}{4} = \frac{1}{2} [\cos(4x) + \cos(2x)] ; \text{ b) }$$

$$\sin(2x) \cos x = \frac{1}{2} [\sin(3x) + \sin x].$$

39. a) $z = \pm 5i$; b) $z = \pm 3i$.

41. $\Delta = 4 - 8 = -4$; $z = \frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$.

43. a) $x^2 - y^2 = 8$, $x^2 + y^2 = 10$, $2xy = 6 > 0$: $x^2 = 9$, $y^2 = 1$, x et y de même signe, d'où les racines carrées $\pm(3+i)$. b) $\Delta = (1+i)^2 - 4(2+2i) = -8 - 6i$; racine carrée : $x^2 = 1$, $y^2 = 9$, $2xy = -6 < 0$, donc $\delta = 1 - 3i$; $z = \frac{(1+i) \pm (1-3i)}{2}$: $z_1 = 1 - i$ et $z_2 = 2i$.

45. a) Le **cercle** de centre le point d'affixe $3i$ et de rayon 2. b) $|z - (1+i)| = |z - 3|$: la **médiatrice** du segment joignant les points d'affixes $1+i$ et 3 .

47. $AB = |1 - (-1)| = 2$; $AC = |i\sqrt{3} + 1| = 2$; $BC = |i\sqrt{3} - 1| = 2$: le triangle ABC est **équilatéral**.

49. $z' - (1+2i) = i((2+i) - (1+2i)) = i(1-i) = 1+i$, d'où $z' = 2+3i$; puis $2+3i-2 = 3i$.

Corrigés « J'approfondis » (exercices impairs et sélection)

51. $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{2e^{i\pi/3}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i(\pi/3+\pi/4)} = \sqrt{2}e^{7i\pi/12}$;

$$z^{12} = (\sqrt{2})^{12} e^{i \cdot 12 \cdot 7\pi/12} = 64 e^{7i\pi} = 64 e^{i\pi} = -64.$$

53. Les trois z_k ont pour module 2 (cercle de centre O et de rayon 2) et des arguments $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ régulièrement espacés de $\frac{2\pi}{3}$: triangle **équilatéral**. Côté : $|z_0 - z_1| = |2 - 2e^{2i\pi/3}| = 2\sqrt{3}$.

54. $AB = |(5+2i) - (1+2i)| = 4$; $BC = |(3+5i) - (5+2i)| = |-2+3i| = \sqrt{13}$; $AC = |(3+5i) - (1+2i)| = |2+3i| = \sqrt{13}$. $AC = BC$: **isocèle** en C .

55. a) $|z| = |e^{i\theta}| = 1$: le point du bord reste sur le cercle de centre O et de rayon 1. b) On multiplie z par $e^{i\pi/6}$: la nouvelle position est $ze^{i\pi/6} = e^{i(\theta+\pi/6)}$, c'est-à-dire l'image de z par la **rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$** (le module reste égal à 1, seul l'argument augmente).

56. Pour $z = re^{i\theta}$, $ze^{i\alpha} = re^{i(\theta+\alpha)}$: module inchangé, argument augmenté de α ; l'image **tourne** de α autour de O (rotation de centre O , d'angle α).

57. Si $z = a + bi$, alors $\bar{z} = a - bi$: les deux images $M(a; b)$ et $M'(a; -b)$ sont **symétriques par rapport à l'axe des réels**. Une symétrie axiale conserve les distances, donc $OM' = OM$, c'est-à-dire

$|\bar{z}| = |z|$; le calcul le confirme, puisque $\sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$. En revanche l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'})$ est l'**opposé** de $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, d'où $\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$. On le retrouve aussi par le calcul : si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, alors $\bar{z} = r(\cos \theta - i \sin \theta) = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$.

58. a) $z' = e^{i\pi/2}z = iz$; $i \times 2 = 2i$: $r(A) = B \checkmark$. **b)** $OM' = |iz| = |z| = OM$ et $\arg \frac{z'}{z} = \arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, donc $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$: le triangle OMM' est **rectangle isocèle en O**. **c)** $z' = iz$ est réel $\iff z$ est imaginaire pur : l'ensemble est l'**axe des imaginaires**.

Corrigés des situations d'intégration (corrigés-types)

Situation 1 (Koudougou). On pose $z_A = 2 + i$, $z_B = 6 + i$, $z_C = 4 + 4i$. Le poste D d'affixe z est à égale distance de A et de B si $|z - z_A| = |z - z_B|$: l'ensemble cherché est la **médiatrice de $[AB]$** . Comme A et B ont la même ordonnée 1 et pour abscisses 2 et 6, cette médiatrice est la droite verticale d'équation $x = 4$. Le poste D a donc pour affixe $4 + yi$, avec y quelconque. La longueur de câble vaut alors $DC = |z_C - z_D| = |4 + 4i - (4 + yi)| = |(4 - y)i| = |4 - y|$. La condition $|4 - y| \leq 4$ équivaut à $0 \leq y \leq 8$. **Le chef de secteur peut placer D n'importe où sur la droite $x = 4$, mais seules les positions comprises entre $(4; 0)$ et $(4; 8)$ évitent de commander du câble** ; la position $(4; 1)$, sur l'alignement des deux postes, ne demande que 3 km. Le prix du kilomètre et l'effectif de l'équipe ne servent pas ici.

Situation 2 (Bobo-Dioulasso). La pointe a pour affixe initiale $z = 3e^{i\pi/6} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$: elle est donc à 1,5 m au-dessus de O . Après la rotation de $\frac{\pi}{3}$, l'affixe devient $3e^{i\pi/2} = 3i$: la pointe est à 3 m au-dessus de O . Après le demi-tour, elle devient $3e^{i(\pi/2+\pi)} = -3i$: la pointe est à 3 m **au-dessous** de O . Une rotation conserve le module : la pointe reste en permanence à 3 m du mât, donc à plus de 2 m, et la première condition est respectée dans les deux manœuvres. En revanche le plancher technique est à 2 m sous O : la pointe passerait 1 m au-dessous. **La première manœuvre est conforme, la seconde ne l'est pas : le demi-tour doit être refusé.** La hauteur du mât et la fréquence d'émission ne servent pas au calcul : ce sont des données parasites.

Situation 3 (Bagré). On pose $z_A = 1 + i$ et $z_B = 5 + 5i$. Le milieu M de $[AB]$ a pour affixe $\frac{z_A + z_B}{2} = \frac{6 + 6i}{2} = 3 + 3i$. La distance de M à A vaut $|3 + 3i - (1 + i)| = |2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2} \approx 2,83$ km, et il en va de même pour MB puisque M est le milieu. Comme $2,83 < 3$, **la balise peut être posée au milieu**, mais avec une marge faible (moins de 200 m). Pour le cap : $z_B - z_A = 4 + 4i$, dont un argument est $\frac{\pi}{4}$ et le module $4\sqrt{2} \approx 5,66$ km. **Les piroguiers doivent suivre la direction à 45° (nord-est) sur environ 5,7 km.** La puissance du barrage et la surface de la retenue ne servent pas.

Situation 4 (Orodara). Le bras arrose exactement les points situés à 20 m au plus de O , c'est-à-dire les points d'affixe z vérifiant $|z| \leq 20$. Pour P : $|12 + 16i| = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$, le plant est **tout juste atteint**. Pour Q : $18^2 + 12^2 = 324 + 144 = 468 > 400$, donc $|z_Q| > 20$ et le plant **n'est pas arrosé**. Pour R : $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 < 400$, donc $|z_R| = 10 < 20$ et le plant **est arrosé**. Un quatrième plant arrosé tout juste doit être placé sur le cercle de centre O et de rayon 20, par exemple en $(20; 0)$, en $(0; 20)$

ou en $(16; 12)$, puisque $16^2 + 12^2 = 400$. Le nombre total de manguiers et le débit de la pompe sont des données parasites.

Situation 5 (Houndé). Les trois puits ont pour affixes $z_1 = 2e^{i \cdot 0} = 2$, $z_2 = 2e^{2i\pi/3}$ et $z_3 = 2e^{4i\pi/3}$. Leurs modules valent tous 2 : les trois puits sont donc bien sur un même cercle de centre le camp et de rayon 2 km, et **la piste circulaire est géométriquement possible**. Sa longueur serait celle du cercle, soit $2\pi \times 2 = 4\pi \approx 12,6$ km. Les trois pistes droites, elles, mesureraient chacune 2 km, soit 6 km au total. **La solution des trois pistes droites demande deux fois moins de kilomètres : c'est elle qu'il faut conseiller au géologue**, la piste circulaire n'ayant d'intérêt que si l'on veut circuler d'un puits à l'autre sans repasser par le camp. La production d'or et l'effectif de l'équipe n'interviennent pas.

Situation 6 (Ouahigouya). Le vecteur $\overrightarrow{S_1 S_2}$ a pour affixe $(3 + 5i) - (3 + i) = 4i$: il est vertical et de longueur 4 dam. Le triangle est rectangle et isocèle en S_1 si $\overrightarrow{S_1 T}$ se déduit de $\overrightarrow{S_1 S_2}$ par une rotation d'un quart de tour autour de S_1 , c'est-à-dire par multiplication par i ou par $-i$. Avec i : $4i \times i = -4$, donc $z_T = (3 + i) - 4 = -1 + i$, soit $T(-1; 1)$, à l'ouest. Avec $-i$: $4i \times (-i) = 4$, donc $z_T = (3 + i) + 4 = 7 + i$, soit $T(7; 1)$, à l'est. **Les deux emplacements possibles sont $(-1; 1)$ et $(7; 1)$; le terrain n'étant disponible qu'à l'est, la coopérative doit retenir $T(7; 1)$.** Les deux tapis mesureront 4 dam, soit 40 m chacun. Le tonnage stocké et la hauteur des silos ne servent pas au calcul.

Situation 7 (Zagtolouli). L'écriture complexe de la rotation de centre Ω d'affixe $\omega = 2 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est $z' - \omega = i(z - \omega)$, soit $z' = iz + 3 - i$. Pour le point d'ancrage A d'affixe $5 + i$: $z_A - \omega = 3$, puis $i \times 3 = 3i$, donc $z_{A'} = (2 + i) + 3i = 2 + 4i$. **Le point d'ancrage arrive en $A'(2; 4)$.** Une rotation conserve les distances : pendant toute la manœuvre, l'ancrage reste à $|z_A - \omega| = 3$ dam du mât, donc décrit le cercle de centre Ω et de rayon 3. Or le carré balisé, centré sur Ω et de côté 6, s'étend de -1 à 5 en abscisse et de -2 à 4 en ordonnée : le cercle de rayon 3 y est exactement inscrit et touche les quatre côtés. **La manœuvre reste donc dans la zone balisée, mais sans aucune marge** : il faut le signaler au chef de chantier avant l'opération. Le nombre de modules et la puissance de la centrale sont des données parasites.

Grille de correction APC

Le barème, identique pour les sept situations. Chacun des trois critères minimaux vaut 3 points et compte 6 indicateurs observables ; le critère de perfectionnement vaut 1 point et en compte 3. Conversion : 0 à 1 indicateur validé $\rightarrow$ **0 pt** ; 2 à 3 $\rightarrow$ **1 pt** (partiel) ; 4 à 5 $\rightarrow$ **2 pts** (maîtrisé) ; 6 $\rightarrow$ **3 pts**. L'élève est déclaré **compétent** si aucun critère minimal n'est à 0 et si un seul au plus est au niveau partiel. S'il est compétent, on ajoute le critère de perfectionnement (validé si au moins 2 de ses 3 indicateurs le sont) et un **bonus de 1 point** ; sinon, ni perfectionnement ni bonus. La note est plafonnée à 10, puis multipliée par 2 pour le bulletin.

CP — Perfectionnement (les sept situations). La production est claire, bien organisée et grammaticalement correcte ; la démarche est concise, sans calcul inutile ; la conclusion est mise en évidence et soigneusement présentée.

Situation 1 — Le réseau électrique de Koudougou

- **C1 Pertinence** : a traduit les trois points du plan en affixes ; a reconnu que « à égale distance de A et de B » se traduit par une égalité de modules ; a identifié l'ensemble cherché comme une médiatrice ; a

compris que la longueur de câble est la distance DC ; a vu qu'il faut poser une inéquation pour exploiter les 4 km disponibles ; a écarté le prix du kilomètre et l'effectif de l'équipe.

- **C2 Outils** : affixes $2 + i$, $6 + i$, $4 + 4i$ correctes ; équation $|z - z_A| = |z - z_B|$ posée ; médiatrice trouvée d'équation $x = 4$; expression $DC = |4 - y|$ établie ; inéquation $|4 - y| \leq 4$ résolue en $0 \leq y \leq 8$; au moins une position numérique exhibée.
- **C3 Cohérence** : l'ensemble des positions est décrit comme une droite, pas comme un point isolé ; le sous-ensemble compatible avec les 4 km est distingué de l'ensemble complet ; les longueurs sont exprimées en kilomètres ; l'ordre de grandeur (quelques kilomètres) est plausible ; la réponse indique explicitement au chef de secteur ce qu'il peut faire ; la conclusion tranche la question du câble supplémentaire.

Situation 2 — L'antenne de Bobo-Dioulasso

- **C1 Pertinence** : a reconnu que la position de la pointe se décrit par un nombre complexe de module 3 ; a traduit chaque manœuvre par une rotation, donc par un changement d'argument ; a compris que la distance au mât est le module ; a compris que la hauteur par rapport à O est la partie imaginaire ; a identifié les deux contraintes du règlement comme deux vérifications distinctes ; a écarté la hauteur du mât et la fréquence.
- **C2 Outils** : forme algébrique $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$ exacte ; affixe après la première rotation $3e^{i\pi/2} = 3i$; affixe après le demi-tour $-3i$; module constant égal à 3 justifié ; parties imaginaires correctement interprétées en mètres ; valeurs exactes conservées (pas d'approximation abusive de $\sqrt{3}$).
- **C3 Cohérence** : la conservation du module est reliée à la nature de la transformation ; les deux contraintes sont examinées séparément ; la position $-3i$ est comparée à la cote du plancher ; les hauteurs sont exprimées en mètres et rapportées à O ; la conclusion distingue la manœuvre conforme de celle qui ne l'est pas ; la réponse est directement utilisable par le technicien.

Situation 3 — Le pont de Bagré

- **C1 Pertinence** : a traduit les deux piliers en affixes ; a reconnu que la balise est le milieu d'un segment ; a compris que la contrainte des 3 km porte sur une distance, donc sur un module ; a reconnu que le cap correspond à un argument ; a vu qu'il fallait former le vecteur $\overrightarrow{AB}$; a écarté la puissance du barrage et la surface de la retenue.
- **C2 Outils** : affixe du milieu $3 + 3i$; distance $MA = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$; valeur approchée 2,83 km correcte ; affixe $z_B - z_A = 4 + 4i$; module $4\sqrt{2} \approx 5,66$ km ; argument $\frac{\pi}{4}$ soit 45° .
- **C3 Cohérence** : l'égalité $MA = MB$ est justifiée par la position de milieu ; la comparaison de 2,83 à 3 est explicite ; la faible marge est signalée ; les distances sont en kilomètres et le cap en degrés ou en radians ; la conclusion répond aux deux questions du chef de brigade ; la direction est exprimée dans un langage utilisable par un piroguier.

Situation 4 — Le verger d'Orodara

- **C1 Pertinence** : a traduit la zone arrosée par une condition sur le module ; a écrit cette condition sous la forme $|z| \leq 20$; a traduit les trois plants en affixes ; a compris qu'il suffit de comparer des carrés pour

éviter les racines ; a reconnu que « arrosé tout juste » signifie appartenir au cercle ; a écarté le nombre de manguiers et le débit de la pompe.

- **C2 Outils** : $|z_P| = \sqrt{144 + 256} = 20$; comparaison $324 + 144 = 468 > 400$ pour Q ; $|z_R| = 10$; les trois conclusions individuelles sont correctes ; une position du quatrième plant est donnée sur le cercle ; cette position est vérifiée par le calcul du module.
- **C3 Cohérence** : le cas limite de P est signalé comme tel et non confondu avec les autres ; les trois plants sont traités séparément et sans contradiction ; les longueurs sont en mètres ; l'ordre de grandeur (quelques mètres) est plausible ; la conclusion dit clairement à Awa quels plants sont arrosés ; la proposition du quatrième emplacement est justifiée.

Situation 5 — Les mines de Houndé

- **C1 Pertinence** : a traduit « à 2 km dans la direction d'angle θ » par une écriture exponentielle ; a compris que la question du cercle revient à comparer des modules ; a reconnu que la longueur de la piste circulaire est celle d'un cercle ; a vu que les trois pistes droites sont trois rayons ; a compris que la décision se prend en comparant deux totaux ; a écarté la production d'or et l'effectif.
- **C2 Outils** : affixes $2, 2e^{2i\pi/3}, 2e^{4i\pi/3}$; les trois modules calculés et trouvés égaux à 2 ; longueur du cercle $2\pi \times 2 = 4\pi$; valeur approchée 12,6 km ; total des trois pistes droites $3 \times 2 = 6$ km ; comparaison des deux totaux effectuée.
- **C3 Cohérence** : l'égalité des modules est liée à l'appartenance à un même cercle ; les deux longueurs sont exprimées dans la même unité ; l'ordre de grandeur (une dizaine de kilomètres) est plausible ; la comparaison est explicite et chiffrée ; la conclusion recommande une solution et non les deux ; la réserve sur la circulation d'un puits à l'autre est mentionnée ou l'absence de réserve est assumée.

Situation 6 — L'oignon de Ouahigouya

- **C1 Pertinence** : a traduit les deux silos en affixes ; a formé le vecteur $\overrightarrow{S_1 S_2}$; a reconnu que « rectangle isocèle en S_1 » se traduit par un quart de tour autour de S_1 ; a compris que la multiplication par i ou par $-i$ réalise ce quart de tour ; a vu qu'il existe deux emplacements et qu'il faut les départager ; a écarté le tonnage stocké et la hauteur des silos.
- **C2 Outils** : affixe $\overrightarrow{S_1 S_2} = 4i$; produit $4i \times i = -4$; produit $4i \times (-i) = 4$; affixes $z_T = -1 + i$ et $z_T = 7 + i$; longueur des tapis $|4i| = 4$ dam ; conversion en 40 m.
- **C3 Cohérence** : les deux emplacements sont donnés avant d'être départagés ; le choix de l'est est justifié par la contrainte de terrain ; les longueurs sont exprimées avec leur unité et converties ; l'ordre de grandeur (quelques dizaines de mètres) est plausible ; la conclusion désigne un emplacement unique à la coopérative ; la longueur de tapis à commander est indiquée.

Situation 7 — La centrale solaire de Zagtoui

- **C1 Pertinence** : a identifié la transformation comme une rotation de centre Ω ; a su qu'elle s'écrit $z' - \omega = i(z - \omega)$; a compris que la trajectoire de l'ancrage est un cercle ; a relié le rayon de ce cercle à la distance ΩA ; a traduit la zone balisée par un encadrement des coordonnées ; a écarté le nombre de modules et la puissance.

- **C2 Outils** : $z_A - \omega = 3$; image $i \times 3 = 3i$; affixe $z_{A'} = 2 + 4i$; distance $\Omega A = \Omega A' = 3$; carré balisé décrit par $-1 \leq x \leq 5$ et $-2 \leq y \leq 4$; comparaison du rayon 3 à la demi-longueur du côté.
- **C3 Cohérence** : la conservation de la distance est justifiée par la nature de la transformation ; le raisonnement porte sur toute la manœuvre et pas seulement sur les positions initiale et finale ; les longueurs sont en décimètres ou converties ; la conclusion tranche la question de la sortie de zone ; l'absence de marge est signalée au chef de chantier ; la réponse reste utilisable sur le chantier.

Corrigés « Vers le BAC »

59. a) $z = \frac{(1 + i\sqrt{3})(1 + i)}{2} = \frac{(1 - \sqrt{3}) + (1 + \sqrt{3})i}{2}$. b) $|1 + i\sqrt{3}| = 2$, $\arg = \frac{\pi}{3}$; $|1 - i| = \sqrt{2}$, $\arg = -\frac{\pi}{4}$. c) $|z| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $\arg(z) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7\pi}{12}$. d) $z^{12} = \left(\sqrt{2}\right)^{12} e^{i \cdot 12 \cdot 7\pi/12} = 64 e^{7i\pi} = -64$.

60. a) $\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 16 = 12 - 16 = -4$; $z = \frac{2\sqrt{3} \pm 2i}{2} = \sqrt{3} \pm i$. b) $|\sqrt{3} + i| = 2$, $\arg = \frac{\pi}{6}$: $z = 2 e^{\pm i\pi/6}$. c) Les solutions $\sqrt{3} + i$ et $\sqrt{3} - i$ sont conjuguées : leurs images sont **symétriques par rapport à l'axe des réels**.

61. a) $Z = \frac{(4 + 2i) - 4}{(4 + 2i) - 2i} = \frac{2i}{4} = \frac{1}{2}i$: imaginaire pur. b) $|Z| = \frac{MA}{MB}$ et $\arg Z = \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) + 2k\pi$. c) $|Z| = 1 \iff MA = MB$: E_1 est la **médiatrice** de $[AB]$. d) Z imaginaire pur (non nul) $\iff \left(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$: E_2 est le **cercle de diamètre** $[AB]$, privé de A et de B .

Fin du Chapitre 1 : Nombres complexes.