

CHAPITRE 1

CHAPITRE 1 : Les nombres réels : intervalles, encadrement, valeur absolue

Intervalles de $\mathbb{R}$ · Encadrement d'une somme et d'un produit · Valeur absolue et distance

PREMIER TRIMESTRE

JE M'ÉCHAUFFE — Calcul mental

A faire de tête, en 2 à 3 minutes. Les corrigés sont en bas de page.

1.	$(-8) + (+5)$	9.	5^2
2.	$(-6) \times (-4)$	10.	10^3
3.	$12 - (-7)$	11.	2^5
4.	$(-3) \times (+9)$	12.	$10^4 \div 10^2$
5.	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$	13.	Carré parfait juste avant 26
6.	$\frac{3}{4}$ de 20	14.	Périmètre d'un carré de 9 cm
7.	Simplifie $\frac{15}{20}$	15.	Aire d'un rectangle 7 cm sur 4 cm
8.	$\frac{2}{5} \times 10$	16.	Moitié de 0,5

Corrigés : ** 1. -3 · 2. +24 · 3. 19 · 4. -27 · 5. $\frac{6}{5}$ · 6. 15 · 7. $\frac{4}{3}$ · 8. 4 · 9. 25 · 10. 1 000 · 11. 32 · 12. $10^2 = 100$ · 13. 25 · 14. 36 cm · 15. 28 cm² · 16. 0,25



prix du sac de mil, en FCFA
« entre 12 000 et 15 000 FCFA » : un intervalle de nombres réels.

Figure 1 : « Le sac de mil coûte entre 12 000 et 15 000 FCFA » : tous les prix possibles forment un intervalle.

Quand un commerçant dit « le sac de mil coûte entre 12 000 et 15 000 FCFA », il ne donne pas un prix exact : il donne un **encadrement**. Quand on dit « le village est à 7 km », peu importe qu'on aille vers l'est ou vers l'ouest : c'est une **distance**, toujours positive. Ces deux idées si courantes, les mathématiques les écrivent avec des **intervalles** et la **valeur absolue**.

En 4ème, tu as appris à ranger les réels et à calculer avec eux. Cette année, tu vas apprendre à décrire des **portions** de la droite des réels, à **encadrer** un résultat sans le calculer exactement, et à mesurer la **distance** entre deux nombres. Ces outils te serviront partout : en géométrie pour les distances, et au BEPC pour contrôler un résultat sans le calculer en entier.

SOMMAIRE

Sommaire du chapitre :

Leçon 1 : Les intervalles de $\mathbb{R}$

Leçon 2 : Encadrement d'une somme et d'un produit

Leçon 3 : Valeur absolue et distance de deux réels

UN PEU D'HISTOIRE

Les nombres ne sont pas tous nés en même temps. Les hommes ont d'abord compté avec les entiers, puis ont inventé les fractions pour partager. Mais très tôt, un problème a surgi : la **diagonale d'un carré** de côté 1 ne peut s'écrire ni comme un entier, ni comme une fraction. On l'appelle aujourd'hui $\sqrt{2}$, un nombre **irrationnel**.

Il a fallu des siècles pour accepter ces nombres « qui ne tombent pas juste ». Le mot **réel** lui-même a été choisi pour les distinguer d'autres nombres dits « imaginaires ». Aujourd'hui, on rassemble tous ces nombres, entiers, décimaux, fractions et irrationnels, dans un même ensemble noté $\mathbb{R}$, que l'on représente par une droite continue, sans aucun trou : à chaque point correspond un réel, et à chaque réel un point.

L'écriture des intervalles avec des crochets, elle, est bien plus récente : elle s'est fixée au début du XXe siècle, quand les mathématiciens ont eu besoin d'un langage court pour désigner « tous les nombres compris entre deux valeurs ».

CE QUE TU DOIS DEJA SAVOIR

Vérifie tes acquis de 4ème avant de commencer. Si tu échoues à un exercice, lis l'encadré Rappel correspondant. Les corrigés sont en fin de chapitre.

Exercice P1. Range dans l'ordre croissant : -3 ; 0 ; $-5,2$; $1,7$; -1 . (Rappel 1)

Exercice P2. Calcule : $(-4) + (+9)$; $(-3) \times (-6)$; $5 - (-2)$. (Rappel 1)

Exercice P3. Donne la valeur absolue, c'est-à-dire la distance à zéro, de : -7 ; $+4$; 0 . (Rappel 2)

Exercice P4. Calcule : $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$; puis $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9}$. (Rappel 3)

Exercice P5. Donne l'écriture scientifique de 4 500 et de 0,007. (Rappel 3)

RAPPEL

Ce qu'il faut se souvenir. Sur la droite graduée, un nombre est plus petit qu'un autre s'il est situé plus à gauche. Pour additionner deux relatifs de même signe, on additionne les distances à zéro et on garde le signe ; pour deux relatifs de signes contraires, on soustrait. Soustraire, c'est ajouter l'opposé. Pour un produit : même signe, le résultat est positif ; signes contraires, il est négatif.

Mini-exemple. $-5,2 < -3 < -1 < 0 < 1,7 \cdot (-3) \times (-6) = +18 \cdot 5 - (-2) = 5 + 2 = 7$.

Vérifie toi-même. Quel est le plus grand : -2 ou $-2,5$? (Réponse : -2 .)

RAPPEL

Ce qu'il faut se souvenir. La valeur absolue d'un nombre est sa distance à zéro ; elle est toujours positive ou nulle. On la note entre deux barres : $|-7| = 7$; $|+4| = 4$; $|0| = 0$.

Mini-exemple. $|-12| = 12$, car le nombre -12 est à 12 unités de zéro.

Vérifie toi-même. Combien vaut $|-9|$? (Réponse : 9.)

RAPPEL

Ce qu'il faut se souvenir. Pour additionner deux fractions, on les réduit au même dénominateur. Pour les multiplier, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, puis on simplifie.

L'écriture scientifique d'un nombre est $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

Mini-exemple. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \cdot 32\,000 = 3,2 \times 10^4 \cdot 0,005 = 5 \times 10^{-3}$.

Vérifie toi-même. Ecris 0,07 en écriture scientifique. (Réponse : 7×10^{-2} .)

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Savoir

- Définir un intervalle de $\mathbb{R}$ et reconnaître ses bornes, incluses ou exclues.
- Définir la valeur absolue d'un réel et la distance de deux réels.

Savoir-faire théorique

- Ecrire un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles ; déterminer l'intersection et la réunion de deux intervalles.
- Encadrer une somme de deux réels et un produit de deux réels positifs.
- Ecrire une expression sans le symbole de valeur absolue.

Savoir-faire pratique

- Représenter un intervalle sur une droite graduée.
- Placer un réel et reconnaître son appartenance à un intervalle.

LECON 1 : Les intervalles de $\mathbb{R}$

Activité de découverte — Les prix au marché de Réo

Au marché de Réo, Aminata vend des mangues. Elle annonce : « Mes mangues coûtent de 200 à 300 FCFA la pièce, tout compris. » Ousmane, lui, vend les siennes « à plus de 250 FCFA, jamais moins ».

1. Quels prix entiers, en FCFA, Aminata peut-elle pratiquer ? Le prix 200 est-il permis ? Et 300 ?
2. Le prix 250 est-il permis chez Ousmane ? Et 251 ?
3. Sur une droite graduée, colorie la portion des prix possibles chez Aminata.

Ne donne pas encore la réponse : observe, et cherche une façon d'écrire « tous les nombres entre deux bornes ».

Ce que l'activité met en évidence

Chez Aminata, la liste des prix possibles est très longue : 200, 201, 202, et ainsi de suite jusqu'à 300. Si l'on accepte les prix en francs et en centimes, cette liste devient même infinie. On ne peut donc pas écrire tous ces nombres un par un. Il faut une écriture courte, qui dise d'un seul coup « tous les nombres compris entre 200 et 300 ». C'est exactement le rôle d'un intervalle.

Le « tout compris » d'Aminata et le « plus de » d'Ousmane ne disent pas la même chose. Chez Aminata, les deux prix 200 et 300 sont acceptés : ils font partie de l'ensemble. Chez Ousmane, le prix 250 est refusé, alors que 251, ou même 250,5, est accepté : la valeur 250 est une limite que l'on n'atteint pas. L'écriture nouvelle doit donc distinguer une borne **incluse** d'une borne **exclue**. C'est ce que fera le sens des crochets.

Tu réinvestis l'ordre dans $\mathbb{R}$ et la droite graduée, vus en 4ème.

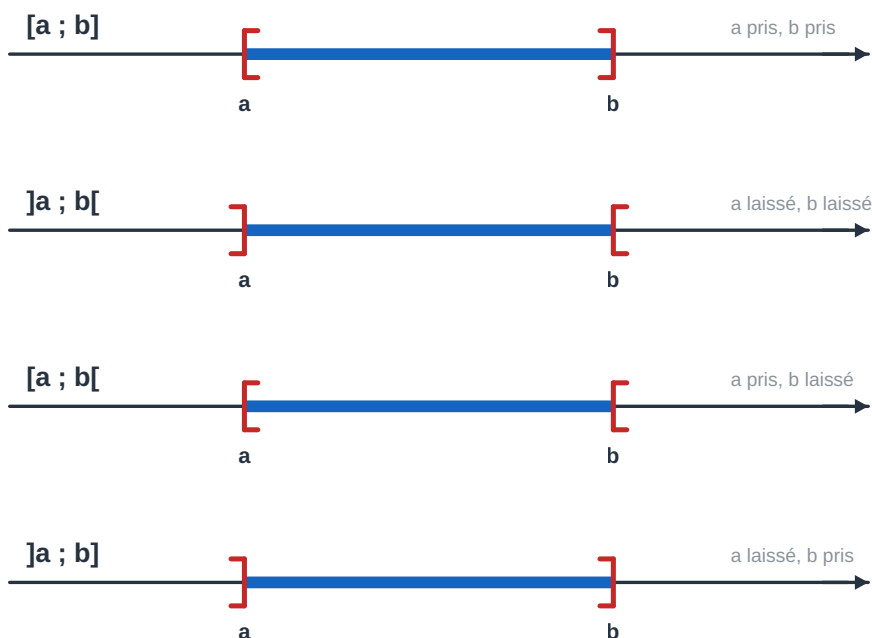
CE QU'IL FAUT RETENIR

- Un **intervalle** est l'ensemble de tous les réels compris entre deux bornes a et b , avec $a \leq b$.
- Un crochet **tourné vers l'intérieur** de l'intervalle **inclut** la borne ; un crochet **tourné vers l'extérieur** l'**exclut**.

Notation	Signification	Lecture
$[a ; b]$	tous les x tels que $a \leq x \leq b$	bornes incluses
$]a ; b[$	tous les x tels que $a < x < b$	bornes exclues
$[a ; b[$	tous les x tels que $a \leq x < b$	a inclus, b exclu
$]a ; b]$	tous les x tels que $a < x \leq b$	a exclu, b inclus
$[a ; +\infty[$	tous les x tels que $x \geq a$	de a à l'infini
<math]-\infty ;="" b]<="" math=""></math]-\infty>	tous les x tels que $x \leq b$	de l'infini à b

- Le symbole ∞ , qui se lit « infini », n'est **pas un nombre** : la borne infinie est **toujours** ouverte.
- L'**intersection** de deux intervalles, notée $\cap$ et lue « inter », est l'ensemble des réels qui appartiennent **aux deux** intervalles à la fois. S'ils n'ont aucun réel commun, l'intersection est **vide**, ce qui se note $\emptyset$.
- La **réunion** de deux intervalles, notée $\cup$ et lue « union », est l'ensemble des réels qui appartiennent **à au moins un** des deux intervalles.

» Note étymologique : « intervalle » vient du latin *intervallum*, l'espace entre deux palissades.



Le crochet fermé garde la borne, le crochet ouvert la laisse dehors.

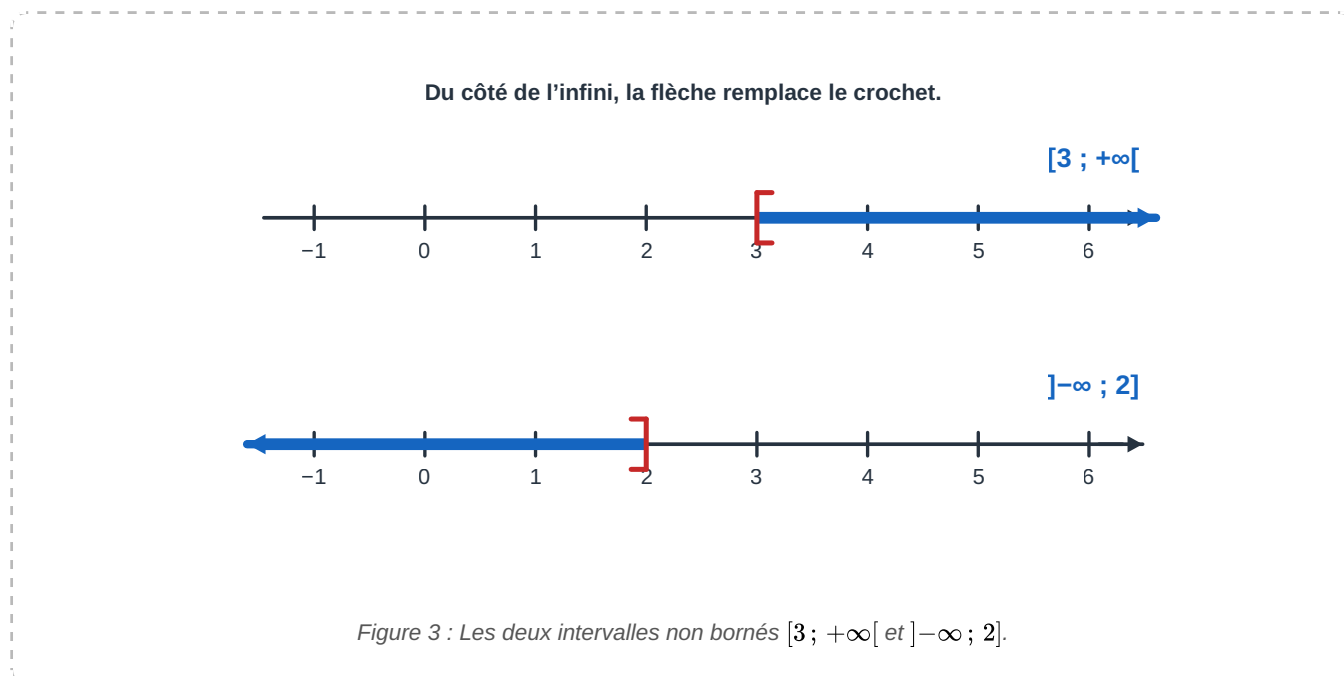
Figure 2 : Les quatre intervalles bornés, représentés sur la droite graduée.

Comment lire cette règle. Le tableau paraît long, mais il ne contient qu'une seule idée : le sens du crochet dit si la borne fait partie de l'ensemble. Un moyen sûr de ne pas se tromper est de voir le crochet comme une petite main. Quand elle se referme sur le nombre, celui-ci est pris ; quand elle s'ouvre vers l'extérieur, il est laissé de côté. Les deux dernières lignes ne sont pas des exceptions : l'infini n'étant pas un nombre, il ne peut jamais être pris, et son crochet reste donc toujours ouvert.

REPRESENTER UN INTERVALLE SUR LA DROITE GRADUEE

Un intervalle se voit mieux qu'il ne se lit. Pour le représenter, on trace une droite graduée, on place les deux bornes, puis on colorie la portion comprise entre elles, en dessinant sur chaque borne le crochet dans le bon sens.

Pour un intervalle non borné, la coloration se poursuit jusqu'au bord de la feuille et se termine par une flèche, qui rappelle que l'ensemble continue sans fin. Ainsi $[3 ; +\infty[$ commence en 3, avec un crochet fermé, et file vers la droite ; $] -\infty ; 2]$, lui, vient de très loin à gauche et s'arrête en 2, cette borne étant comprise.



METHODE : ECRIRE UN INTERVALLE À PARTIR D'UNE INÉGALITÉ

Étape 1 : Repère la ou les bornes : ce sont les nombres qui limitent l'ensemble.

Étape 2 : Pour chaque borne, regarde si elle est **incluse**, avec le symbole $\leq$ ou $\geq$, ou **exclue**, avec le symbole $<$ ou $>$.

Étape 3 : Place la plus petite borne à gauche, la plus grande à droite.

Étape 4 : Mets un crochet fermé pour une borne incluse, ouvert pour une borne exclue ou pour l'infini.

EXEMPLE RESOLU 1 : écrire trois ensembles sous forme d'intervalle

Ecrire sous forme d'intervalle : (1) $-2 \leq x < 4$; (2) $x \geq 3$; (3) $-5 < x \leq -1$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Dans le premier cas, il y a deux bornes. Le symbole $\leq$ devant -2 montre que -2 fait partie de l'ensemble : son crochet se referme. Le symbole $<$ devant 4 montre que 4 en est exclu : son crochet s'ouvre vers l'extérieur.	$-2 \leq x < 4$ s'écrit $x \in [-2; 4[$.
Dans le deuxième cas, il n'y a qu'une seule borne, 3 , et elle est incluse. Rien n'arrête l'ensemble à droite : on écrit donc $+\infty$, avec un crochet ouvert, puisque l'infini n'est pas un nombre.	$x \geq 3$ s'écrit $x \in [3; +\infty[$.
Dans le troisième cas, les deux bornes sont négatives. On les range quand même de la plus petite à la plus grande : -5 est à gauche de -1 sur la droite graduée.	$-5 < x \leq -1$ s'écrit $x \in]-5; -1]$.

Vérification : 0 appartient bien à $[-2; 4[$, car $-2 \leq 0 < 4$; 3 appartient bien à $[3; +\infty[$, car $3 \geq 3$; et -1 appartient à $] -5; -1]$, puisque la borne de droite y est incluse.

METHODE : DÉTERMINER L'INTERSECTION ET LA RÉUNION DE DEUX INTERVALLES

Étape 1 : Représente les deux intervalles sur une **même droite graduée** : un trait au-dessus de la droite, l'autre au-dessous.

Étape 2 : L'**intersection** $E \cap F$ est la zone couverte par **les deux** traits à la fois. S'il n'y a aucune zone commune, l'intersection est vide.

Étape 3 : La **réunion** $E \cup F$ est la zone couverte par **au moins un** trait.

Étape 4 : Lis les bornes et choisis les crochets : une borne appartient à l'intersection seulement si elle appartient **aux deux** intervalles.

EXEMPLE RESOLU 2 : les horaires du centre de santé de Solenzo

Au centre de santé de Solenzo, la salle de vaccination reçoit de 8 h à 12 h, midi compris. Le laboratoire, lui, n'ouvre qu'après 10 h et ferme à 16 h, cette heure comprise. On note x l'heure de la journée. Entre quelles heures les deux services sont-ils ouverts en même temps ? Entre quelles heures au moins l'un des deux est-il ouvert ?

Zone commune (intersection) : $]10 ; 12]$. Zone couverte au moins une fois (réunion) : $[8 ; 16]$.

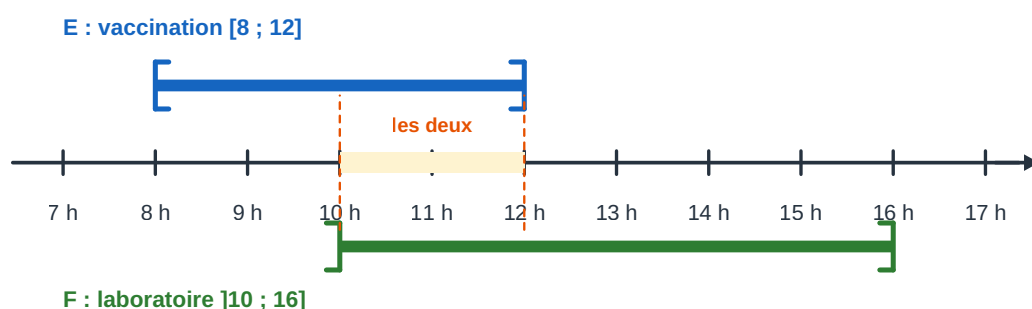


Figure 4 : Les deux plages horaires sur une même droite. La zone commune se lit d'un coup d'œil.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On traduit d'abord chaque phrase en intervalle. Pour la vaccination, 8 h et 12 h sont comprises : les deux crochets se referment. Pour le laboratoire, « après 10 h » exclut 10 h, alors que 16 h est comprise.	$E = [8 ; 12]$ et $F =]10 ; 16]$.
Les deux services sont ouverts en même temps quand l'heure appartient aux deux intervalles : on cherche donc l'intersection. Sur la figure, la zone couverte deux fois va de 10 h à 12 h.	On cherche $E \cap F$.
On choisit les crochets un par un. L'heure 10 h n'appartient pas à F : elle sort de l'intersection. L'heure 12 h appartient à E et à F : elle y reste.	$E \cap F =]10 ; 12]$.
Au moins un service est ouvert quand l'heure appartient à l'un des deux intervalles : on cherche la réunion. Les deux plages se chevauchent, elles se recollent donc en un seul intervalle.	$E \cup F = [8 ; 16]$.

Vérification : on peut contrôler avec trois heures particulières. A 9 h, seule la vaccination reçoit, donc 9 doit être dans la réunion et non dans l'intersection : c'est bien le cas, car $9 \in [8 ; 16]$ et $9 \notin]10 ; 12]$. A 11 h, les deux services sont ouverts, et 11 appartient bien à $]10 ; 12]$. A 17 h, plus rien n'est ouvert, et 17 n'appartient à aucun des deux intervalles. Une personne qui a besoin des deux services doit donc venir entre 10 h et midi.

QUAND L'INTERSECTION EST VIDE

Deux intervalles n'ont pas toujours de partie commune. Si le premier s'arrête avant que le second ne commence, aucun réel n'appartient aux deux à la fois : leur intersection est l'ensemble vide, noté $\emptyset$. Ainsi $[5 ; 8] \cap [0 ; 2] = \emptyset$, car tout nombre du premier vaut au moins 5, alors que tout nombre du second vaut au plus 2. Leur réunion, elle, n'est pas vide, mais ce n'est plus un seul intervalle : entre 2 et 5, il manque tout un morceau. On laisse alors l'écriture telle quelle, avec le symbole $\cup$, et l'on parle d'une **réunion de deux intervalles**.

Aucun réel commun : l'intersection de E et de F est vide.

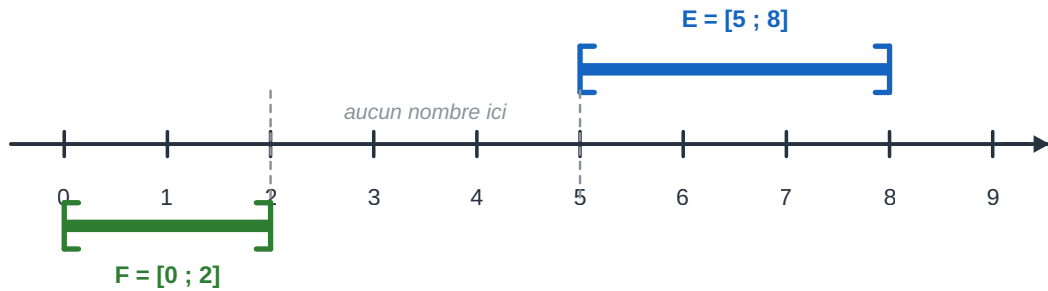


Figure 5 : Les intervalles E et F ne se rencontrent nulle part.

ATTENTION !

Ne confonds pas le crochet fermé, qui inclut la borne, et le crochet ouvert, qui l'exclut. Écrire $[2; 5]$, où 5 est inclus, n'est pas la même chose qu'écrire $[2; 5[$, où 5 est exclu. Et du côté de l'infini, le crochet est **toujours** ouvert : on écrit $[3; +\infty[$, jamais $[3; +\infty]$.

À TOI DE JOUER !

Exercice 1. Ecris sous forme d'intervalle : a) $-1 < x \leq 5$; b) $x < 2$.

Exercice 2. a) Traduis par une inégalité, puis place sur une droite graduée : $x \in]-3; 1]$. b) Détermine $[-2; 3] \cap [0; 5]$ et $[-2; 3] \cup [0; 5]$.

k) CALCUL REFLECHI

Pour savoir si un nombre appartient à un intervalle, compare-le aux bornes de tête. Le nombre 2,3 appartient-il à $[2; 4[$? Oui, car $2 \leq 2,3 < 4$. Et -5 appartient-il à $]-\infty; -5]$? Oui, car $-5 \leq -5$: cette borne est incluse.

La valeur absolue de la leçon 3 prépare la distance dans un repère (Ch. 10).

LECON 2 : Encadrement d'une somme et d'un produit

Activité de découverte — Le sac de karité de Nouna

A Nouna, Boureima achète du beurre de karité. Un sac pèse entre 45 et 50 kg, et le prix du karité varie entre 800 et 1 000 FCFA le kilogramme.

1. Quel est le prix le plus bas possible pour un sac ? Le plus élevé ?
2. Entre quelles valeurs se trouve forcément le prix d'un sac ?
3. Si Boureima achète deux sacs, chacun pesant entre 45 et 50 kg, entre quelles valeurs se trouve la masse totale ?

Cherche d'abord le minimum, puis le maximum, avant de conclure.

Ce que l'activité met en évidence

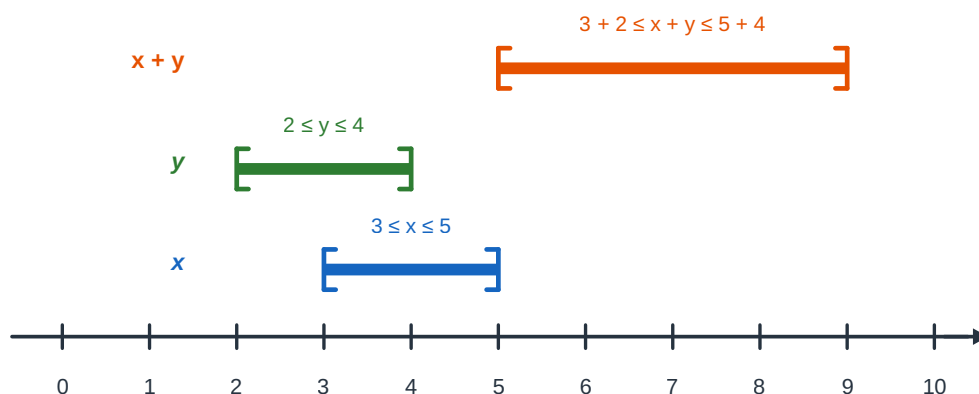
Ni la masse du sac ni le prix du kilogramme ne sont connus exactement, et pourtant on peut déjà dire beaucoup de choses sur la somme à payer. Le cas le plus favorable est celui du sac le plus léger au prix le plus bas ; le cas le plus défavorable est celui du sac le plus lourd au prix le plus haut. Entre ces deux extrêmes se trouvent forcément tous les prix possibles.

C'est un changement de point de vue important. Jusqu'ici, tu calculais un résultat exact à partir de données exactes. Ici, tu calcules **deux** résultats, un minimum et un maximum, à partir de deux encadrements. Le résultat n'est plus un nombre : c'est un intervalle. Cette façon de travailler est celle des commerçants, des maçons et des agriculteurs, qui doivent prévoir un budget avant de connaître les quantités exactes.

CE QU'IL FAUT RETENIR

- **Encadrer** un nombre, c'est l'enfermer entre deux valeurs : $a \leq x \leq b$.
- **Encadrement d'une somme.** Si $a_1 \leq x \leq a_2$ et $b_1 \leq y \leq b_2$, alors $a_1 + b_1 \leq x + y \leq a_2 + b_2$.
- **Encadrement d'un produit de réels positifs.** Si $0 \leq a_1 \leq x \leq a_2$ et $0 \leq b_1 \leq y \leq b_2$, alors $a_1 \times b_1 \leq x \times y \leq a_2 \times b_2$.
- Pour additionner des encadrements, on additionne les bornes de même côté ; pour multiplier des nombres positifs, on multiplie les bornes de même côté.
- **Ajouter un nombre** ne change pas le sens des inégalités : si $a \leq x \leq b$, alors $a + c \leq x + c \leq b + c$.
- **Multiplier par un nombre positif** ne change pas non plus le sens : si $a \leq x \leq b$ et $k > 0$, alors $ka \leq kx \leq kb$.
- **Multiplier par un nombre négatif retourne l'ordre** : si $a \leq x \leq b$ et $k < 0$, alors $kb \leq kx \leq ka$.
En particulier, si $a \leq x \leq b$, alors $-b \leq -x \leq -a$.

» Note étymologique : « encadrer », c'est « mettre dans un cadre » : on enferme le nombre entre deux limites.



On additionne les deux minima, puis les deux maxima.

Figure 6 : De $3 \leq x \leq 5$ et $2 \leq y \leq 4$, on déduit $5 \leq x + y \leq 9$.

Comment lire cette règle. Ces règles ne s'apprennent pas par cœur : elles se retrouvent en cherchant le cas le plus favorable et le cas le plus défavorable. Pour une somme, le total est le plus petit possible quand les deux quantités sont au plus bas, et le plus grand possible quand elles sont au plus haut. Pour un produit de nombres positifs, le raisonnement est le même. La seule règle qui surprend est la dernière : prendre l'opposé retourne l'inégalité, parce que le plus grand nombre devient le plus petit une fois passé de l'autre côté de zéro.

ENCADRER UNE DIFFERENCE

Une différence se ramène toujours à une somme, puisque soustraire un nombre revient à ajouter son opposé : $x - y = x + (-y)$. On encadre donc d'abord $-y$, ce qui retourne son encadrement, puis on additionne comme d'habitude.

Si $b_1 \leq y \leq b_2$, alors $-b_2 \leq -y \leq -b_1$. En ajoutant l'encadrement de x , on obtient $a_1 - b_2 \leq x - y \leq a_2 - b_1$. Retiens la forme de ce résultat : pour la borne de gauche, on prend le **plus petit** x moins le **plus grand** y ; pour celle de droite, le plus grand x moins le plus petit y . C'est logique : la différence est la plus petite possible quand on enlève beaucoup à peu, et la plus grande quand on enlève peu à beaucoup.

METHODE : ENCADRER UNE SOMME, UNE DIFFÉRENCE OU UN PRODUIT

Étape 1 : Ecris l'encadrement de chaque quantité, les bornes bien alignées l'une sous l'autre.

Étape 2 : Pour une **somme** : additionne les bornes de gauche entre elles, puis celles de droite.

Étape 3 : Pour une **différence** : commence par retourner l'encadrement de la quantité que l'on retranche, puis additionne.

Étape 4 : Pour un **produit de positifs** : multiplie les bornes de gauche entre elles, puis celles de droite.

Étape 5 : Ecris l'encadrement obtenu, et termine par une phrase de réponse avec l'unité.

JE DEMONTRE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). x et y sont deux réels tels que $a_1 \leq x \leq a_2$ et $b_1 \leq y \leq b_2$.

Outil (la propriété que j'utilise). Ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité ne change pas son sens.

Conclusion (ce que j'en déduis). De $a_1 \leq x$, en ajoutant b_1 aux deux membres, on tire $a_1 + b_1 \leq x + b_1$. De $b_1 \leq y$, en ajoutant x aux deux membres, on tire $x + b_1 \leq x + y$. En mettant ces deux inégalités bout à bout, on obtient $a_1 + b_1 \leq x + y$. Le même raisonnement, mené avec a_2 et b_2 , donne $x + y \leq a_2 + b_2$. Donc $a_1 + b_1 \leq x + y \leq a_2 + b_2$.

Rédaction type. « On sait que $a_1 \leq x$ et que $b_1 \leq y$. Or ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve son sens. Donc $a_1 + b_1 \leq x + b_1$ et $x + b_1 \leq x + y$, d'où $a_1 + b_1 \leq x + y$. »

Quel type de raisonnement ? Une déduction directe, en deux étapes que l'on enchaîne : on encadre d'abord un côté, puis l'autre.

Déductogramme.

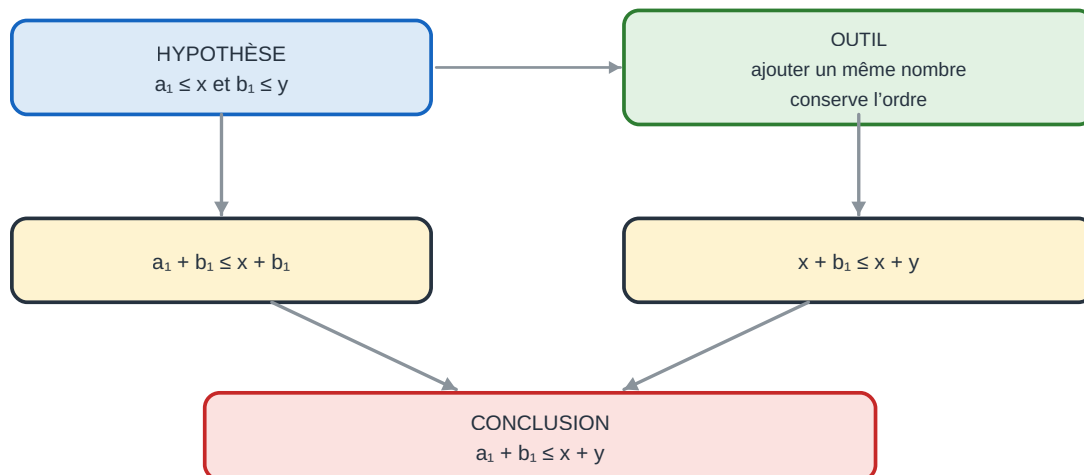


Figure 7 : Le chemin du raisonnement, de l'hypothèse à la conclusion.

EXEMPLE RESOLU 1 : le prix d'un sac de karité

Un sac de karité pèse entre 45 et 50 kg ; le prix du kilogramme est compris entre 800 et 1 000 FCFA.

Encadrer le prix d'un sac.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On note m la masse du sac et p le prix du kilogramme, puis on écrit les deux encadrements l'un sous l'autre. Les deux quantités sont positives : la règle du produit s'applique.	$45 \leq m \leq 50$ et $800 \leq p \leq 1\,000$.
Le prix du sac est le produit de la masse par le prix du kilogramme. Il est le plus petit possible quand les deux facteurs sont au plus bas, et le plus grand quand ils sont au plus haut : on multiplie donc les bornes de gauche entre elles, puis celles de droite.	$45 \times 800 \leq m \times p \leq 50 \times 1\,000$.
On effectue les deux produits.	$36\,000 \leq m \times p \leq 50\,000$.

Vérification : un sac moyen de 47 kg à 900 FCFA le kilogramme coûte 42 300 FCFA, une valeur bien comprise entre 36 000 et 50 000. Le prix d'un sac est donc compris entre 36 000 et 50 000 FCFA.

EXEMPLE RESOLU 2 : le bénéfice de la revendeuse de Toma

A Toma, Salamata achète un sac d'arachides à un prix compris entre 15 000 et 17 000 FCFA, puis le revend à un prix compris entre 20 000 et 24 000 FCFA. Encadrer son bénéfice sur un sac. Est-elle sûre de gagner au moins 2 000 FCFA ?

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On note v le prix de vente et a le prix d'achat. Le bénéfice est la différence entre ce qu'elle reçoit et ce qu'elle a payé.	$B = v - a$, avec $20\,000 \leq v \leq 24\,000$ et $15\,000 \leq a \leq 17\,000$.
On retourne l'encadrement du prix d'achat, puisqu'il est retranché : le plus grand prix d'achat donne le plus petit opposé.	$-17\,000 \leq -a \leq -15\,000$.
On additionne alors les deux encadrements, bornes de gauche ensemble et bornes de droite ensemble.	$20\,000 - 17\,000 \leq B \leq 24\,000 - 15\,000$.
On effectue les deux calculs.	$3\,000 \leq B \leq 9\,000$.

Vérification : on peut contrôler le pire des cas à la main. Le bénéfice le plus faible s'obtient quand Salamata achète le plus cher, à 17 000 FCFA, et revend le moins cher, à 20 000 FCFA : elle gagne alors 3 000 FCFA. Comme 3 000 est déjà supérieur à 2 000, elle est sûre, quoi qu'il arrive, de gagner au moins 2 000 FCFA sur un sac.

ATTENTION !

La règle du produit, « bornes de gauche entre elles, bornes de droite entre elles », n'est vraie que pour des nombres **positifs**. Et pour une **différence**, ne soustrais jamais les bornes de même côté : commence toujours par retourner l'encadrement de la quantité retranchée. L'élève qui écrit directement $a_1 - b_1 \leq x - y \leq a_2 - b_2$ se trompe presque à tous les coups.

À TOI DE JOUER !

Exercice 3. On sait que $3 \leq x \leq 5$ et $2 \leq y \leq 4$. Encadre $x + y$.

Exercice 4. Un champ rectangulaire a une longueur comprise entre 20 et 22 m et une largeur comprise entre 12 et 13 m. Encadre son aire.

j) CALCUL REFLECHI

Avant de calculer un produit exact, encadre-le pour vérifier l'ordre de grandeur. Le produit 48×19 est compris entre $40 \times 10 = 400$ et $50 \times 20 = 1\,000$; le vrai résultat, 912, est bien dans cet intervalle. Ce contrôle rapide permet de repérer une grosse erreur de calcul.

Tu réinvestis l'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$, vus en 4ème.

LECON 3 : Valeur absolue et distance de deux réels

Activité de découverte — La piste de Kongoussi

Le long de la piste qui traverse Kongoussi, on repère les hameaux par un nombre : le marché est au kilomètre 0, les positions vers l'est sont comptées positivement, celles vers l'ouest négativement. Aminata habite au km +80, Salif au km -40.

1. A quelle distance du marché habite Aminata ? Et Salif ?

2. Cette distance dépend-elle du sens, vers l'est ou vers l'ouest ?
3. Quelle est la distance entre les maisons d'Aminata et de Salif ?

Observe : une distance est toujours positive, même quand le repère donne un nombre négatif.

Ce que l'activité met en évidence

Le signe du nombre et la distance ne disent pas la même chose. Le signe indique de quel côté du marché on se trouve ; la distance, elle, indique seulement de combien de kilomètres on s'en éloigne. Salif habite au km -40 , mais personne ne dira qu'il habite à -40 km : il habite à 40 km. Il faut donc un outil qui efface le signe sans rien changer d'autre.

Pour la distance entre les deux maisons, la soustraction seule ne suffit pas non plus. Selon l'ordre dans lequel on soustrait, on obtient 120 ou -120 , alors que la distance ne peut être qu'un seul nombre, forcément positif. La valeur absolue va régler les deux problèmes d'un coup.

CE QU'IL FAUT RETENIR

- La **valeur absolue** d'un réel x , notée $|x|$, est sa distance à zéro. Elle est toujours **positive ou nulle**.
- Si $x \geq 0$, alors $|x| = x$. Si $x < 0$, alors $|x| = -x$, c'est-à-dire son opposé, qui est positif.
- La **distance de deux réels** a et b est $|a - b|$, ou $|b - a|$: c'est le même nombre.
- Deux nombres **opposés** ont la même valeur absolue : $|-5| = |5| = 5$.
- Pour tous réels k et x , on a $|kx| = |k| \times |x|$: un facteur peut sortir de la valeur absolue, à condition de sortir lui aussi en valeur absolue.

» Note étymologique : « absolu » vient du latin *absolutus*, « détaché » : on détache le nombre de son signe.

La valeur absolue d'un nombre est sa distance à zéro : elle est toujours positive.

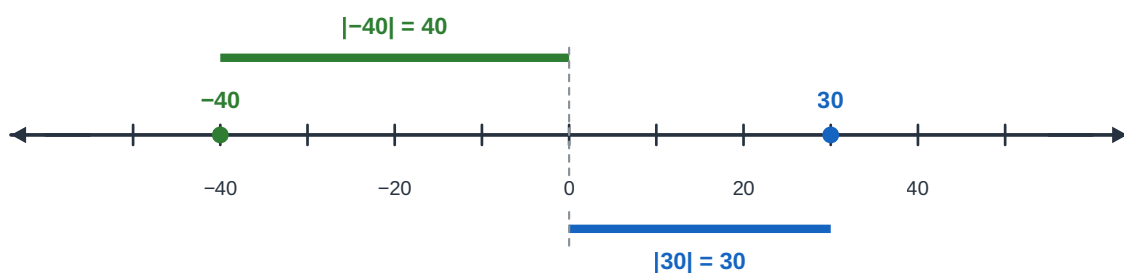


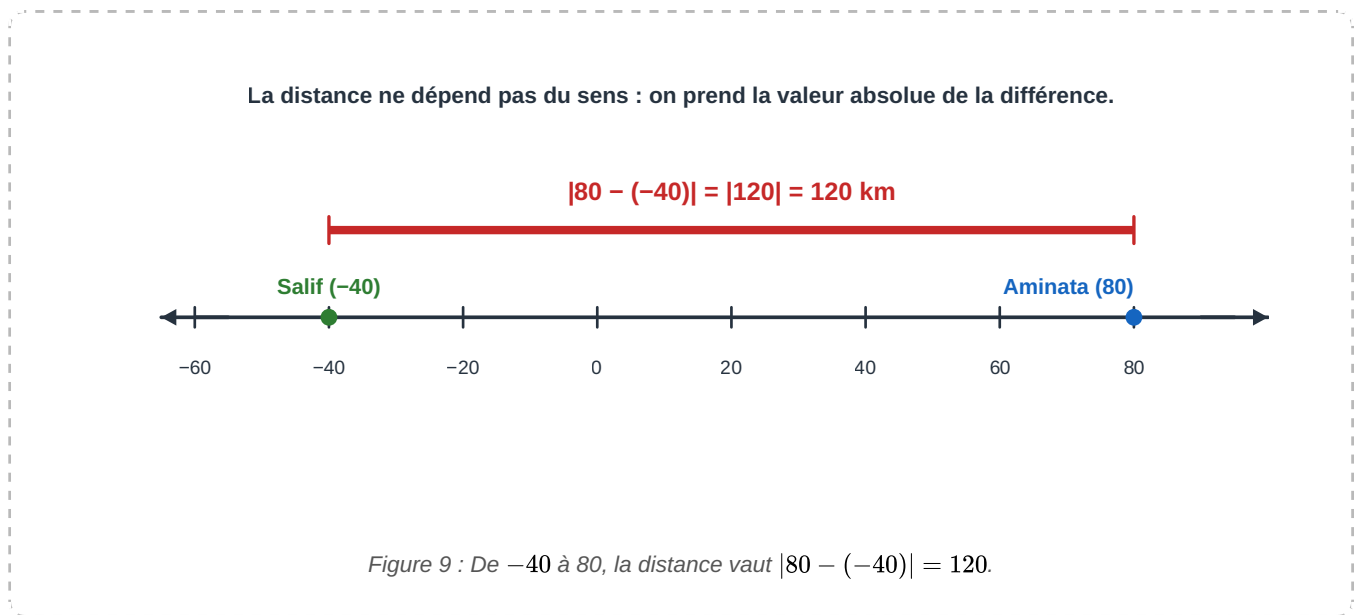
Figure 8 : La valeur absolue se lit sur la droite graduée : c'est le nombre d'unités qui séparent le point de zéro.

Comment lire cette règle. La définition en deux cas surprend souvent, alors qu'elle ne fait que traduire une évidence : pour rendre un nombre positif, il n'y a rien à faire s'il l'est déjà, et il faut changer son signe s'il est négatif. Le point délicat est l'écriture $|x| = -x$ pour x négatif. Elle a l'air de donner un résultat négatif, mais c'est faux : si x vaut -7 , alors $-x$ vaut $+7$. Le signe moins ne rend pas le nombre négatif, il inverse son signe.

LA DISTANCE DE DEUX REELS

Sur une droite graduée, la distance entre deux points ne dépend pas du sens dans lequel on la parcourt. C'est pourquoi on la calcule avec une valeur absolue : $AB = |x_B - x_A|$. Si l'on soustrait dans l'autre ordre, on trouve l'opposé, et la valeur absolue rend malgré tout le même résultat.

Cette écriture est particulièrement utile quand les deux abscisses sont de signes contraires. De -40 à 80 , on parcourt d'abord 40 km pour rejoindre le marché, puis 80 km pour atteindre l'autre maison, soit 120 km en tout ; et le calcul $|80 - (-40)| = |120| = 120$ donne bien ce résultat, sans qu'on ait à découper le trajet en deux morceaux.

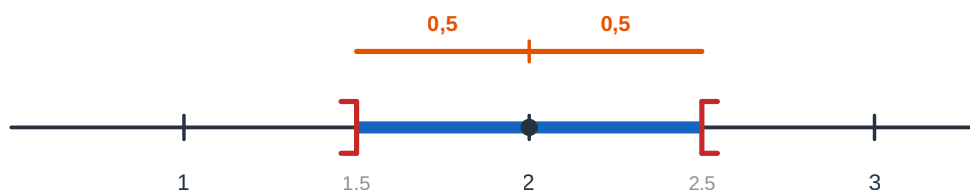


LIRE UNE VALEUR ABSOLUE COMME UN INTERVALLE

Une phrase comme « x est à moins de $0,5$ de 2 » se traduit par $|x - 2| < 0,5$. Elle décrit tous les nombres situés à moins d'une demi-unité de 2 , c'est-à-dire tous les nombres compris entre $2 - 0,5$ et $2 + 0,5$. On obtient donc l'intervalle $]1,5 ; 2,5[$, centré en 2 .

De façon générale, pour un rayon r positif, l'inégalité $|x - a| < r$ décrit l'intervalle $]a - r ; a + r[$, centré en a . C'est ainsi que l'on exprime en mathématiques une tolérance de fabrication ou une marge d'erreur : une pièce de 2 cm fabriquée « à un demi-millimètre près » a une longueur x qui vérifie $|x - 2| < 0,05$.

$$|x - 2| < 0,5 \text{ c'est-à-dire } x \text{ est dans }]1,5 ; 2,5[$$



Tous les nombres situés à moins d'une demi-unité de 2.

Figure 10 : L'intervalle décrit par l'inégalité $|x - 2| < 0,5$ est centré en 2.

METHODE : ECRIRE UNE EXPRESSION SANS VALEUR ABSOLUE

Étape 1 : Repère le contenu écrit entre les barres.

Étape 2 : Étudie son **signe** : est-il positif ou négatif pour les valeurs de la lettre que l'on considère ?

Étape 3 : Si ce contenu est positif ou nul, enlève simplement les barres.

Étape 4 : S'il est négatif, enlève les barres et prends l'**opposé** de tout le contenu.

EXEMPLE RESOLU 1 : trois valeurs absolues et une distance

Ecrire sans valeur absolue : (1) $|-7|$ et $|3 - 8|$; (2) la distance entre $a = 80$ et $b = -40$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Le nombre -7 est négatif : sa distance à zéro est son opposé. On ne recopie donc pas le signe moins.	$ -7 = 7.$
Dans la deuxième écriture, il faut d'abord effectuer le calcul placé entre les barres, et seulement ensuite prendre la distance à zéro du résultat.	$ 3 - 8 = -5 = 5.$
Pour la distance de deux réels, on soustrait les deux nombres, puis on prend la valeur absolue de la différence, ce qui garantit un résultat positif.	$d = 80 - (-40) = 120 = 120.$

Vérification : sur la droite graduée, de -40 à 80 , il y a bien 120 unités, puisque $40 + 80 = 120$.

EXEMPLE RESOLU 2 : le poste de contrôle de Diapaga

Sur la piste de Diapaga, un poste de contrôle est installé au km 25. Un camion se trouve au km -15 , un car au km 60. Quel véhicule est le plus proche du poste ? A quel kilomètre faudrait-il installer un second poste pour qu'il soit à la même distance des deux véhicules ?

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
La distance d'un véhicule au poste est la valeur absolue de la différence de leurs positions. On commence par le camion.	$d_1 = -15 - 25 = -40 = 40$ km.
On fait le même calcul pour le car, en gardant le même ordre de soustraction.	$d_2 = 60 - 25 = 35 = 35$ km.
On compare les deux distances obtenues, qui sont deux nombres positifs.	$35 < 40$: le car est le plus proche.
Le second poste doit être à égale distance des deux véhicules : il est au milieu du segment qui les joint, donc à la demi-somme de leurs positions.	$\frac{-15 + 60}{2} = \frac{45}{2} = 22,5$.

Vérification : depuis le km 22,5, la distance au camion vaut $|-15 - 22,5| = 37,5$ km, et la distance au car vaut $|60 - 22,5| = 37,5$ km. Les deux distances sont bien égales. Le car est donc le plus proche du premier poste, et le second poste doit être installé au km 22,5.

ATTENTION !

Une valeur absolue n'est **jamais négative**. Écrire $|x| = -3$ est impossible : cette égalité n'a aucune solution. Et la distance entre deux réels se calcule toujours avec une valeur absolue : on écrit $|a - b|$ pour être sûr d'obtenir un résultat positif, jamais $a - b$ tout seul, qui peut être négatif.

À TOI DE JOUER !

Exercice 5. Calcule : $|-12|$; $|+6|$; $|4 - 9|$; $|-2 - 3|$.

Exercice 6. Sur une piste, un hameau A est au km 15 et un hameau B au km -20 . Calcule la distance AB.

AUTO-EVALUATION : Test de fin de chapitre

Réponds à toutes les questions. Barème : 1 point par question. Corrigés en fin de chapitre.

Question 1. Ecris sous forme d'intervalle : $-3 \leq x \leq 2$.

Question 2. Ecris sous forme d'intervalle : $x > 5$.

Question 3. Le nombre 4 appartient-il à $[4 ; 9[$? Et à $]4 ; 9[$? Justifie.

Question 4. Traduis par une inégalité : $x \in]-\infty ; 0]$.

Question 5. On sait que $-2 \leq x \leq 1$. Encadre $x + 5$.

Question 6. On sait que $2 \leq x \leq 5$ et $3 \leq y \leq 4$, ces nombres étant positifs. Encadre $x \times y$.

Question 7. Calcule $|-8|$ et $|2 - 7|$.

Question 8. Donne la distance entre les réels -3 et 5 .

Question 9. Vrai ou faux : « une valeur absolue peut être négative ». Justifie.

Question 10. Ecris sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x tels que $|x| < 3$.

Question 11. Range dans l'ordre croissant : $-1,5$; $|-2|$; 0 ; $|1|$.

Question 12. Détermine $[-2; 3] \cap [1; 6]$.

JE M'EXERCE

Les exercices sont classés par leçon et par difficulté croissante. Les corrigés des exercices impairs sont en fin de chapitre.

Leçon 1 : Les intervalles de $\mathbb{R}$

Exercice 7. Ecris sous forme d'intervalle : a) $-4 < x$; b) $x < \frac{3}{2}$; c) $-2,4 \leq x < \frac{3}{2}$; d) $x \geq 2$.

Exercice 8. Ecris sous forme d'intervalle : a) $0 \leq x \leq 10$; b) $x > -1$; c) $-5 < x \leq -2$; d) $x \leq 7$; e) l'ensemble $\mathbb{R}_+$ des réels positifs ou nuls ; f) l'ensemble $\mathbb{R}_-$ des réels négatifs ou nuls.

Exercice 9. Sur une droite graduée, place les points $A(-2)$, $B(-4)$, $C(1)$ et $D(3)$, puis colorie l'intervalle $[-4; -2]$.

Exercice 10. Représente sur une droite graduée les intervalles $J = [1; 3[$, $K =]-2; 1]$, $M = [5; +\infty[$ et $N =]-\infty; 3]$.

Exercice 11. Trouve l'intervalle, puis fais la représentation graphique : a) $-1 \leq x \leq \frac{1}{2}$; b) $x < -2$ et $x \geq -3$; c) $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12. Pour chaque intervalle, indique si 0 lui appartient : a) $[-1; 2]$; b) $]0; 5]$; c) $] -\infty; 0[$; d) $[0; +\infty[$.

Exercice 13. Donne un réel appartenant à chacun des intervalles : a) $]2; 3[$; b) $[-1; -0,5]$; c) $] -\infty; -10]$; d) $[100; +\infty[$.

Exercice 14. Ecris sous forme de réunion d'intervalles : a) $x \leq -2$ ou $x > 1$; b) $-10 \leq y < 5$; c) l'ensemble $\mathbb{R}$ privé du nombre 2.

Exercice 15. Détermine $E \cap F$ et $E \cup F$: a) $E = [-1; 7]$ et $F = [0; 10]$; b) $E =]-\infty; 4]$ et $F = [2; +\infty[$.

Exercice 16. Traduis chaque intervalle par une inégalité, puis par une phrase en français : a) $[-3; 1[$; b) $]0; +\infty[$; c) $] -\infty; -5]$.

Exercice 17. Vrai ou faux, en justifiant : a) $5 \in]2; 5[$; b) $-7 \in]-\infty; -7]$; c) l'intervalle $[4; 4]$ contient un seul réel ; d) $[2; 7]$ et $]7; 9]$ ont un réel commun.

Exercice 18. Trouve l'erreur. Salif écrit : « L'ensemble des réels supérieurs ou égaux à 3 est $[3; +\infty]$. » Explique ce qui ne va pas, puis corrige.

Exercice 19. A Sabou, un concours n'est ouvert qu'aux candidats dont l'âge est supérieur ou égal à 16 ans et strictement inférieur à 22 ans. a) Ecris sous forme d'intervalle l'ensemble des âges acceptés. b) Awa a exactement 22 ans : est-elle acceptée ? Justifie.

Exercice 20. Détermine $E \cap F$ dans chaque cas : a) $E = [5; 8]$ et $F = [0; 2]$; b) $E =]-\infty; 1[$ et $F = [1; +\infty[$; c) $E = [-3; 3]$ et $F =]0; 10]$.

Exercice 21. On donne $E = [-2; 5]$ et $F =]1; +\infty[$. a) Représente E et F sur une même droite graduée. b) Détermine $E \cap F$, puis $E \cup F$.

Exercice 22. Recopie et complète par le symbole $\in$ ou par le symbole $\notin$: a) $-1 \dots [-1 ; 3[$; b) $3 \dots [-1 ; 3[$; c) $0,5 \dots]0 ; 1[$; d) $-4 \dots]-\infty ; -4[$.

Leçon 2 : Encadrement d'une somme et d'un produit

Exercice 23. Un nombre x vérifie $1,5 < x \leq 3,8$. Ecris un encadrement de $x + 1$, puis de $x - 1$.

Exercice 24. Un nombre x vérifie $1,5 < x \leq 3,8$. Ecris un encadrement de $-x + 1$, puis de $2x$.

Exercice 25. On donne $2 < x < 5$ et $\frac{1}{2} < y < 6$. Encadre $2x + 3$, puis $x + y$.

Exercice 26. On donne $2 < x < 5$ et $\frac{1}{2} < y < 6$. Encadre $x - y$, puis $3x$.

Exercice 27. Deux nombres x et y sont tels que $x \in [4,28 ; 4,30]$ et $y \in [1,47 ; 1,56]$. Encadre $x + y$, puis $x - y$.

Exercice 28. Avec les mêmes nombres x et y qu'à l'exercice 27, encadre $3x + 5y$, puis $x \times y$.

Exercice 29. Un champ rectangulaire a pour dimensions L et ℓ , en mètres, avec $20,6 < L < 21,1$ et $12,8 < \ell < 13,2$. Encadre le périmètre P de ce champ.

Exercice 30. Le périmètre d'un champ **carré** est compris entre 60 et 68 m. a) Encadre la longueur de son côté. b) Déduis-en un encadrement de son aire.

Exercice 31. Un disque a pour rayon 5 cm. Sachant que $3,14 < \pi < 3,15$, encadre l'aire $A = \pi \times 5^2$ de ce disque.

Exercice 32. Une boîte cylindrique a un rayon r tel que $4,5 < r < 4,6$, en centimètres, et une hauteur h telle que $10 < h < 11$, en centimètres. Sachant que $3,14 < \pi < 3,15$, encadre le volume $V = \pi \times r^2 \times h$.

Exercice 33. Sachant que $x \in \left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right]$, encadre $f(x) = 2x + 5$, puis $g(x) = -3x + 2$.

Exercice 34. Sachant que $x \in \left[\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right]$, encadre $f(x) = x^2$, puis $g(x) = x^2 + x + 3$.

Exercice 35. A Toma, le prix d'un poulet varie entre 2 500 et 3 500 FCFA, et celui d'une pintade entre 4 000 et 5 000 FCFA. Salamata achète un poulet et une pintade. a) Encadre sa dépense. b) Peut-elle être sûre de payer moins de 8 000 FCFA ? Justifie.

Exercice 36. Trouve l'erreur. Un élève écrit : « Comme $2 \leq x \leq 6$ et $1 \leq y \leq 3$, alors $2 - 1 \leq x - y \leq 6 - 3$, soit $1 \leq x - y \leq 3$. » Explique son erreur, puis donne le bon encadrement.

Exercice 37. On sait que $10 \leq x \leq 14$. Encadre : a) $x + 7$; b) $-x$; c) $5x$; d) $100 - x$.

Exercice 38. A Diapaga, un maraîcher récolte chaque jour entre 90 et 110 kg de tomates, qu'il vend entre 300 et 400 FCFA le kilogramme. a) Encadre sa recette d'une journée. b) Encadre sa recette sur 6 jours.

Leçon 3 : Valeur absolue et distance

Exercice 39. Exprime sans le symbole de valeur absolue : a) $|7x|$; b) $|2a|$, avec a positif ; c) $|(-3)x|$; d) $|6,5 \times (-4)b|$, avec b négatif.

Exercice 40. On donne $a = -3$ et $b = 5$. a) Calcule $|a| + |b|$, puis $|a + b|$. Ces deux nombres sont-ils égaux ? b) Recommence avec $a = 3$ et $b = 5$, puis conclus.

Exercice 41. Sur un axe, un point M a pour abscisse x . Exprime la distance de M au point d'abscisse 5, puis au point d'abscisse -2 .

Exercice 42. Trouve tous les réels x tels que : a) $|x| = 4$; b) $|x| = 0$; c) $|x - 1| = 3$.

Exercice 43. Calcule $A = |3 - 4 + 7|$, $B = |25 - 42|$ et $C = 3| - 2| - | - 4 - 1|$.

Exercice 44. Range dans l'ordre croissant : $| - 3|$; $|2|$; $| - 1|$; $|0|$; $|5|$.

Exercice 45. Ecris sans valeur absolue, pour $x = -2$: a) $|x - 1|$; b) $|2x + 1|$; c) $|3 - x|$.

Exercice 46. Deux nombres ont pour valeur absolue 7. Lesquels ? Justifie.

Exercice 47. Sur la route de Boromo, la borne de départ est au km 0. Un camion est arrêté au km 47 et un car au km 112. a) Calcule la distance qui les sépare. b) Un troisième véhicule se trouve exactement à la même distance de chacun d'eux : à quel kilomètre est-il ?

Exercice 48. Ecris sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x tels que $|x - 3| < 2$.

Exercice 49. Vrai ou faux, en justifiant : a) $|x|$ peut valoir -2 ; b) $| - x| = |x|$ pour tout réel x ; c) si $|x| = |y|$, alors $x = y$.

Exercice 50. Trouve l'erreur. Un élève écrit : « La distance du point d'abscisse -6 au point d'abscisse -2 vaut $-6 - (-2) = -4$. » Explique et corrige.

J'APPROFONDIS

Exercices combinant plusieurs leçons. Une sélection est corrigée en fin de chapitre.

Maths et vie quotidienne

Exercice 51. Awa vend des pagnes à Koudougou. Le prix d'un pagne varie entre 3 500 et 5 000 FCFA. Si elle vend entre 8 et 12 pagnes par jour, encadre son chiffre d'affaires quotidien.

Exercice 52. Le sac de riz de 50 kg coûte entre 18 000 et 22 000 FCFA. Une famille achète entre 1,5 et 2 sacs par mois. Encadre sa dépense mensuelle en riz.

Exercice 53. Un champ de mil produit entre 1,2 et 1,8 tonne à l'hectare. Boureima possède entre 3 et 5 hectares. Encadre sa production totale.

Exercice 54. Une vache donne entre 8 et 12 litres de lait par jour, et le litre se vend entre 400 et 500 FCFA. Encadre le revenu quotidien d'un éleveur possédant une vache.

Exercice 55. Un taxi-brousse consomme entre 12 et 15 litres aux 100 km. Pour un trajet de 250 km, encadre sa consommation totale.

Exercice 56. A Gorom-Gorom, un commerçant achète un sac d'oignons à un prix compris entre 12 000 et 14 000 FCFA, puis le revend entre 17 000 et 20 000 FCFA. a) Encadre son bénéfice sur un sac. b) Sur 5 sacs, quel bénéfice est-il sûr de réaliser au minimum ?

J'écris et j'explique

Exercice 57. Un élève écrit : « la distance entre 3 et -5 est $3 - 5 = -2$ ». Explique son erreur et donne le calcul correct.

Exercice 58. Explique avec tes mots, en une ou deux phrases, pourquoi la borne infinie d'un intervalle est toujours écrite avec un crochet ouvert.

Exercice 59. Explique, en deux ou trois phrases, la différence entre les intervalles $[2 ; 5]$ et $]2 ; 5[$, puis donne un nombre qui appartient au premier mais pas au second.

Pour aller plus loin

Exercice 60. Trouve un encadrement de x sachant que $7 < 3x - 1 < 8$.

Exercice 61. Trouve un encadrement de x sachant que $-5 \leq \frac{-2x - 3}{4} \leq -1$.

Exercice 62. Ecris à l'aide d'un intervalle l'ensemble des réels x tels que $|x - 2| < \frac{1}{2}$. (Aide : cette inégalité signifie que x est à moins de $\frac{1}{2}$ de 2.)

Exercice 63. Ecris sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x tels que $|x + 3| \leq 4$. (Aide : $x + 3 = x - (-3)$.)

Exercice 64. Un triangle a une base comprise entre 8 et 10 cm et une hauteur comprise entre 5 et 6 cm. Encadre son aire.

Exercice 65. On donne $E = [-4 ; m]$ et $F = [1 ; 6]$, où m est un réel supérieur ou égal à -4 . Pour quelles valeurs de m l'intersection $E \cap F$ est-elle vide ?

SITUATIONS D'INTÉGRATION

Compétence visée : résoudre, dans des situations d'artisanat, de production agricole et de travaux publics, des problèmes de prévision budgétaire, de contrôle de conformité et de prise de décision, en mobilisant les intervalles, l'encadrement et la valeur absolue.

Ressources mobilisées : écrire un ensemble de réels sous forme d'intervalle ; déterminer l'intersection et la réunion de deux intervalles ; encadrer une somme, une différence et un produit de réels positifs ; retourner l'encadrement d'une quantité retranchée ; calculer une valeur absolue et la distance de deux réels ; traduire une tolérance par une valeur absolue puis par un intervalle.

Moment d'évaluation : à la fin du chapitre, une fois les trois leçons traitées. Corrigés-types et grille de correction en fin de chapitre.

Situation d'intégration 1 : Le présentoir du SIAO à Ouagadougou. A Ouagadougou, dans un atelier de bronze coulé à la cire perdue, Wendlassida prépare le SIAO. Il vend ses statuettes à partir de 12 000 FCFA, sans jamais dépasser 25 000 FCFA. Le comité d'organisation lui réserve un présentoir « artisanat d'art » où ne sont admises que les pièces vendues à plus de 8 000 FCFA et à 20 000 FCFA au plus. Son atelier emploie 4 artisans et le présentoir mesure 9 m². Wendlassida est persuadé qu'il pourra y exposer toute sa production. Dis-lui ce qu'il en est et quels prix il devra retenir.

Situation d'intégration 2 : Le casier de riz de Bagré. Moussa exploite un casier du périmètre irrigué de Bagré. Selon la saison, sa récolte de paddy pèse entre 2 400 et 2 700 kg, et le paddy se vend entre 200 et 250 FCFA le kilogramme. Il voudrait payer comptant, avec la seule recette de ce casier, une motopompe affichée à 600 000 FCFA. Son casier se trouve à 4 km du village et la coopérative compte 120 membres. Moussa te demande s'il peut commander la motopompe dès aujourd'hui sans prendre de risque. Tranche la question et explique-lui ta réponse.

Situation d'intégration 3 : Le marché à bétail de Dori. Au marché à bétail de Dori, les zébus adultes mis en vente pèsent entre 380 et 420 kg, et le poids vif se paie 700 FCFA le kilogramme. Un courtier annonce aux acheteurs : « quel que soit l'animal choisi, l'écart entre son prix et 300 000 FCFA reste inférieur à 20 000

FCFA ». Le marché se tient chaque jeudi et le parc à bétail s'étend sur 3 hectares. Un acheteur doute de cette annonce. Vérifie-la, puis dis au courtier ce qu'il doit corriger dans ce qu'il déclare.

Situation d'intégration 4 : Les noix de cajou de Léo. Aide Rasmata à y voir clair. A Léo, elle achète les noix de cajou aux producteurs entre 300 et 350 FCFA le kilogramme, puis les revend entre 500 et 560 FCFA le kilogramme. Elle vient de traiter un lot de 200 kg et doit rembourser cette semaine, sur cette seule opération, un prêt de 25 000 FCFA. Son entrepôt couvre 180 m² et la coopérative de Léo réunit 45 productrices. Rasmata veut savoir si ce remboursement est assuré, quoi qu'il arrive. Réponds-lui.

Situation d'intégration 5 : Le contrôle des sacs de Banfora. Chaque matin, à la sucrerie de Banfora, un contrôleur pèse quelques sacs pris au hasard sur la chaîne. Les sacs portent la mention 50 kg, et le cahier des charges n'en accepte un que si l'écart entre sa masse réelle et 50 kg ne dépasse pas 0,3 kg. Ce matin, quatre sacs d'un même lot ont été pesés : 50,2 kg ; 49,6 kg ; 50,3 kg ; 49,85 kg. L'usine emploie 800 saisonniers pendant la campagne et un sac vide coûte 250 FCFA. Le responsable veut laisser partir le lot. Dis-lui s'il le peut.

Situation d'intégration 6 : Le dépôt de gravier de Koupéla. Sur l'axe routier qui traverse Koupéla, on repère les points par un nombre : le carrefour central est le km 0, les positions vers l'est sont comptées positivement et celles vers l'ouest négativement. Deux chantiers de réfection sont ouverts, l'un au km -24, l'autre au km 36. Le dépôt de gravier doit être à égale distance des deux chantiers et à 30 km au plus de chacun. Le chauffeur propose de l'installer au km 10. L'entreprise emploie 22 manœuvres et le chantier a démarré en janvier. Le chef de chantier hésite : conseille-le.

Corrigés des situations d'intégration (corrigés-types)

Situation 1 (Ouagadougou). Les prix pratiqués par Wendlassida forment l'intervalle $[12\,000 ; 25\,000]$, ses deux bornes étant atteintes. Les prix admis sur le présentoir vérifient « plus de 8 000 », donc 8 000 exclu, et « 20 000 au plus », donc 20 000 inclus : c'est l'intervalle $]8\,000 ; 20\,000]$. Une statuette peut être exposée si son prix appartient aux deux ensembles à la fois : on cherche donc l'intersection. Sur une même droite graduée, la zone couverte deux fois va de 12 000 à 20 000, et ces deux prix appartiennent bien aux deux intervalles : $[12\,000 ; 25\,000] \cap]8\,000 ; 20\,000] = [12\,000 ; 20\,000]$. **Wendlassida ne pourra donc pas exposer toute sa production sur ce présentoir** : une pièce vendue 22 000 FCFA, par exemple, dépasse le plafond admis. Il doit y réserver les statuettes vendues de 12 000 à 20 000 FCFA, bornes comprises, et présenter les plus chères ailleurs. Les 4 artisans de l'atelier et les 9 m² du présentoir sont des données parasites.

Situation 2 (Bagré). Notons m la masse récoltée, en kilogrammes, et p le prix du kilogramme : $2\,400 \leq m \leq 2\,700$ et $200 \leq p \leq 250$. La recette est le produit $m \times p$, et les deux facteurs sont positifs : on multiplie les bornes de gauche entre elles, puis celles de droite. On obtient $2\,400 \times 200 \leq m \times p \leq 2\,700 \times 250$, soit $480\,000 \leq m \times p \leq 675\,000$. La recette se situe donc entre 480 000 et 675 000 FCFA. Or le prix de la motopompe, 600 000 FCFA, tombe à l'intérieur de cet encadrement. Dans le cas le plus défavorable, une petite récolte vendue au prix le plus bas ne rapporte que 480 000 FCFA : il manquerait alors 120 000 FCFA. **Moussa ne peut donc pas commander la motopompe dès aujourd'hui sans risque** ; l'achat est possible, mais il n'est pas garanti, et il devra attendre la pesée de sa récolte. Les 4 km qui séparent le casier du village et les 120 membres de la coopérative sont des données parasites.

Situation 3 (Dori). Notons M la masse d'un zébu, en kilogrammes : $380 \leq M \leq 420$. Son prix est $700 \times M$, et 700 est positif, donc $380 \times 700 \leq 700M \leq 420 \times 700$, c'est-à-dire $266\,000 \leq p \leq 294\,000$. L'annonce du courtier affirme que l'écart entre le prix et 300 000 FCFA reste inférieur à 20 000 FCFA, ce qui s'écrit $|p - 300\,000| < 20\,000$ et décrit les prix strictement compris entre 280 000 et 320 000 FCFA. Or le zébu le plus léger se paie 266 000 FCFA, et $|266\,000 - 300\,000| = 34\,000$, écart bien supérieur à 20 000. **L'annonce du courtier est donc fausse** : un seul zébu de 380 kg suffit à la mettre en défaut. Le courtier devrait dire que l'écart peut atteindre 34 000 FCFA, ou mieux, annoncer directement la fourchette de 266 000 à 294 000 FCFA. Le jour de marché du jeudi et les 3 hectares du parc à bétail sont des données parasites.

Situation 4 (Léo). Notons v le prix de vente et a le prix d'achat d'un kilogramme de noix : $500 \leq v \leq 560$ et $300 \leq a \leq 350$. Le gain sur un kilogramme est la différence $v - a$. Comme le prix d'achat est retranché, on retourne d'abord son encadrement : $-350 \leq -a \leq -300$. En additionnant les deux encadrements bornes de gauche ensemble et bornes de droite ensemble, on obtient $500 - 350 \leq v - a \leq 560 - 300$, soit $150 \leq v - a \leq 260$. Le lot pèse 200 kg, et 200 est positif : $200 \times 150 \leq B \leq 200 \times 260$, donc $30\,000 \leq B \leq 52\,000$. Même dans le cas le plus défavorable, achat au prix fort et revente au prix faible, Rasmata gagne 30 000 FCFA, soit 5 000 FCFA de plus que la somme à rembourser. **Le remboursement des 25 000 FCFA est donc assuré, quoi qu'il arrive.** Les 180 m² de l'entrepôt et les 45 productrices de la coopérative sont des données parasites.

Situation 5 (Banfora). Un sac est accepté lorsque l'écart entre sa masse m et 50 kg ne dépasse pas 0,3 kg, ce qui s'écrit $|m - 50| \leq 0,3$ et décrit l'intervalle $[49,7 ; 50,3]$. On calcule l'écart de chaque sac pesé : $|50,2 - 50| = 0,2$; $|49,6 - 50| = 0,4$; $|50,3 - 50| = 0,3$; $|49,85 - 50| = 0,15$. Trois de ces écarts, 0,15 ; 0,2 et 0,3, ne dépassent pas la tolérance : les sacs correspondants sont conformes, y compris celui de 50,3 kg, car la tolérance y est atteinte sans être dépassée. En revanche, le sac de 49,6 kg présente un écart de 0,4 kg, supérieur à 0,3 kg : il sort de l'intervalle accepté. **Le responsable ne peut donc pas laisser partir ce lot en l'état** ; il doit retirer le sac de 49,6 kg et faire contrôler le réglage de la chaîne. Les 800 saisonniers de la campagne et le prix du sac vide sont des données parasites.

Situation 6 (Koupéla). La distance d'un point d'abscisse x à un chantier est la valeur absolue de la différence de leurs positions. Pour le chantier du km -24 , elle vaut $|x - (-24)| = |x + 24|$; pour celui du km 36, elle vaut $|x - 36|$. Avec la position proposée par le chauffeur, $x = 10$, on obtient $|10 + 24| = 34$ km et $|10 - 36| = 26$ km : les deux distances ne sont pas égales, et la première dépasse déjà la limite de 30 km. **La proposition du chauffeur doit donc être écartée.** Le point situé à égale distance des deux chantiers est leur milieu, d'abscisse $\frac{-24 + 36}{2} = 6$. On vérifie alors $|6 + 24| = 30$ et $|6 - 36| = 30$: les deux distances sont égales et n'excèdent pas 30 km. Le chef de chantier doit installer le dépôt au km 6. Les 22 manœuvres de l'entreprise et le démarrage du chantier en janvier sont des données parasites.

Grille de correction APC

Le barème, identique pour les six situations. Chacun des trois critères minimaux vaut 3 points et compte 6 indicateurs observables ; le critère de perfectionnement vaut 1 point et en compte 3. Conversion : 0 à 1 indicateur validé $\rightarrow$ **0 pt** ; 2 à 3 $\rightarrow$ **1 pt** (partiel) ; 4 à 5 $\rightarrow$ **2 pts** (maîtrisé) ; 6 $\rightarrow$ **3 pts**. L'élève est déclaré **compétent** si aucun critère minimal n'est à 0 et si un seul au plus est au niveau partiel. S'il est compétent, on ajoute le critère de perfectionnement (validé si au moins 2 de ses 3 indicateurs le sont) et un **bonus de 1 point** ; sinon, ni perfectionnement ni bonus. La note est plafonnée à 10, puis multipliée par 2 pour le bulletin.

CP — Perfectionnement (les six situations). La production est claire, bien organisée et grammaticalement correcte ; la démarche est concise, sans calcul inutile ; la conclusion est mise en évidence et soigneusement présentée.

Situation 1 — Le présentoir du SIAO à Ouagadougou

- **C1 Pertinence** : comprend qu'un prix acceptable doit satisfaire les deux conditions à la fois ; reconnaît qu'il s'agit de croiser deux ensembles de prix et non de les rassembler ; repère que « plus de 8 000 » laisse cette valeur de côté alors que « 20 000 au plus » la retient ; choisit de traduire chaque phrase en intervalle avant de les confronter ; comprend que la question porte sur l'ensemble de la production et non sur une seule pièce ; a écarté les 4 artisans de l'atelier et les 9 m² du présentoir.

- **C2 Outils** : traduit les prix pratiqués par $[12\,000 ; 25\,000]$; traduit les prix admis par $]8\,000 ; 20\,000]$; représente les deux intervalles sur une même droite graduée ; obtient $[12\,000 ; 25\,000] \cap]8\,000 ; 20\,000] = [12\,000 ; 20\,000]$; ferme le crochet en 20 000 parce que cette valeur appartient aux deux intervalles ; contrôle sur un exemple que 22 000 n'appartient pas à l'intersection obtenue.

- **C3 Cohérence** : exprime toutes les bornes en FCFA, sans décimale sur un prix ; obtient une fourchette d'ordre de grandeur plausible pour des statuettes de bronze ; compare le prix le plus élevé pratiqué, 25 000 FCFA, au plafond de 20 000 FCFA ; enchaîne sans rupture la traduction, le croisement et la conclusion ; formule nettement le refus, toute la production ne pouvant être exposée ; donne à Wendlassida la fourchette de prix à retenir, ce qui lui permet de trier ses pièces.

Situation 2 — Le casier de riz de Bagré

- **C1 Pertinence** : comprend que la recette est le produit de la masse récoltée par le prix du kilogramme ; repère qu'aucune des deux quantités n'est connue exactement ; choisit d'encadrer la recette au lieu de calculer une valeur unique ; identifie le cas le plus défavorable comme celui qui décide d'une garantie ; comprend que Moussa demande une certitude et non une simple possibilité ; a écarté les 4 km qui séparent le casier du village et les 120 membres de la coopérative.

- **C2 Outils** : écrit les deux encadrements $2\,400 \leq m \leq 2\,700$ et $200 \leq p \leq 250$; vérifie que les deux facteurs sont positifs avant d'appliquer la règle du produit ; calcule la borne inférieure $2\,400 \times 200 = 480\,000$; calcule la borne supérieure $2\,700 \times 250 = 675\,000$; écrit l'encadrement $480\,000 \leq m \times p \leq 675\,000$; calcule le manque possible $600\,000 - 480\,000 = 120\,000$.

- **C3 Cohérence** : exprime la récolte en kilogrammes et la recette en FCFA ; contrôle que quelques centaines de milliers de FCFA est un ordre de grandeur plausible pour un casier ; compare les deux bornes obtenues au prix de la motopompe, 600 000 FCFA ; relie l'encadrement $480\,000 < 600\,000 < 675\,000$ à l'absence de garantie ; formule la réponse négative, l'achat comptant n'étant pas assuré ; propose à Moussa une suite utile, attendre la pesée ou prévoir un complément.

Situation 3 — Le marché à bétail de Dori

- **C1 Pertinence** : comprend que le prix d'un zébu se déduit de sa masse par un produit ; voit que l'annonce porte sur tous les animaux et pas sur un seul ; traduit « l'écart entre son prix et 300 000 FCFA » par une valeur absolue ; choisit de comparer la fourchette réelle des prix à celle que décrit l'annonce ; comprend qu'un seul cas contraire suffit à mettre en défaut une affirmation générale ; a écarté le jour de marché du jeudi et les 3 hectares du parc à bétail.

- **C2 Outils** : écrit l'encadrement $380 \leq M \leq 420$; calcule $380 \times 700 = 266\,000$; calcule $420 \times 700 = 294\,000$; écrit l'encadrement $266\,000 \leq p \leq 294\,000$; traduit l'annonce par $|p - 300\,000| < 20\,000$, soit les prix strictement compris entre 280 000 et 320 000 ; calcule l'écart $|266\,000 - 300\,000| = 34\,000$.

- **C3 Cohérence** : exprime les masses en kilogrammes et les prix en FCFA ; contrôle que 266 000 FCFA pour un zébu de 380 kg est un ordre de grandeur plausible ; compare la borne 266 000 au seuil de 280 000 imposé par l'annonce ; enchaîne encadrement, traduction et comparaison sans rupture logique ; déclare l'annonce fausse au lieu de se contenter de la nuancer ; donne au courtier l'écart réellement possible, 34 000 FCFA, de quoi corriger ce qu'il déclare.

Situation 4 — Les noix de cajou de Léo

- **C1 Pertinence** : comprend que le gain sur un kilogramme est une différence de deux prix mal connus ; repère qu'on ne peut pas soustraire les bornes de même côté ; choisit d'encadrer le gain sur un kilogramme avant de passer au lot entier ; identifie la borne inférieure comme la seule qui garantisse quelque chose ; comprend que Rasmata demande une garantie et non une espérance de gain ; a écarté les 180 m² de l'entrepôt et les 45 productrices de la coopérative.

- **C2 Outils** : écrit les deux encadrements $500 \leq v \leq 560$ et $300 \leq a \leq 350$; retourne l'encadrement du prix d'achat en $-350 \leq -a \leq -300$; additionne les bornes et obtient $150 \leq v - a \leq 260$; calcule $200 \times 150 = 30\,000$; calcule $200 \times 260 = 52\,000$; écrit l'encadrement $30\,000 \leq B \leq 52\,000$.

- **C3 Cohérence** : exprime les prix en FCFA par kilogramme et le gain du lot en FCFA ; contrôle que quelques dizaines de milliers de FCFA sur 200 kg est un ordre de grandeur plausible ; compare la borne inférieure 30 000 FCFA au prêt de 25 000 FCFA ; relie le cas le plus défavorable à la garantie annoncée ; formule clairement la décision, le remboursement est assuré ; chiffre pour Rasmata la marge restante, 5 000 FCFA, ce qui l'aide à s'engager.

Situation 5 — Le contrôle des sacs de Banfora

- **C1 Pertinence** : comprend que l'écart à la masse annoncée se traduit par une valeur absolue ; voit que le contrôle porte sur chacun des quatre sacs pesés ; choisit de calculer les écarts un par un plutôt qu'une masse totale ; repère que la tolérance est fixée « au plus », donc que la valeur limite reste acceptée ; comprend qu'un seul sac hors tolérance suffit à bloquer le lot ; a écarté les 800 saisonniers de la campagne et les 250 FCFA du sac vide.

- **C2 Outils** : traduit la tolérance par $|m - 50| \leq 0,3$; en déduit l'intervalle des masses acceptées $[49,7 ; 50,3]$; calcule $|50,2 - 50| = 0,2$ et $|49,6 - 50| = 0,4$; calcule $|50,3 - 50| = 0,3$; calcule $|49,85 - 50| = 0,15$; range les quatre écarts obtenus dans l'ordre croissant, de 0,15 à 0,4.

- **C3 Cohérence** : exprime toutes les masses et tous les écarts en kilogrammes ; contrôle qu'un écart de quelques centaines de grammes sur 50 kg est plausible ; compare chacun des quatre écarts à la tolérance de 0,3 kg ; traite la valeur 0,3 comme acceptée, conformément à « ne dépasse pas » ; formule nettement le refus, le lot ne pouvant partir en l'état ; indique au responsable le sac à retirer, ce qui lui permet d'agir tout de suite.

Situation 6 — Le dépôt de gravier de Koupéla

- **C1 Pertinence** : comprend qu'un repérage par nombres signés impose de passer par des distances ; voit que le signe indique le côté du carrefour et non l'éloignement ; choisit de tester d'abord la position annoncée

par le chauffeur ; comprend que l'égalité des deux distances place le dépôt au milieu des deux chantiers ; retient la limite de 30 km comme une condition à contrôler ensuite ; a écarté les 22 manœuvres de l'entreprise et le démarrage du chantier en janvier.

- **C2 Outils** : écrit la distance au premier chantier sous la forme $|x - (-24)| = |x + 24|$; écrit la distance au second sous la forme $|x - 36|$; calcule $|10 + 24| = 34$; calcule $|10 - 36| = 26$; calcule l'abscisse du milieu $\frac{-24 + 36}{2} = 6$; vérifie $|6 + 24| = 30$ et $|6 - 36| = 30$.

- **C3 Cohérence** : exprime les positions et les distances en kilomètres ; contrôle que les deux chantiers sont bien distants de 60 km ; compare les distances trouvées à la limite de 30 km ; relie l'inégalité $34 > 30$ au rejet de la position proposée ; formule le refus puis annonce la position correcte, le km 6 ; donne au chef de chantier un emplacement directement utilisable sur le terrain.