

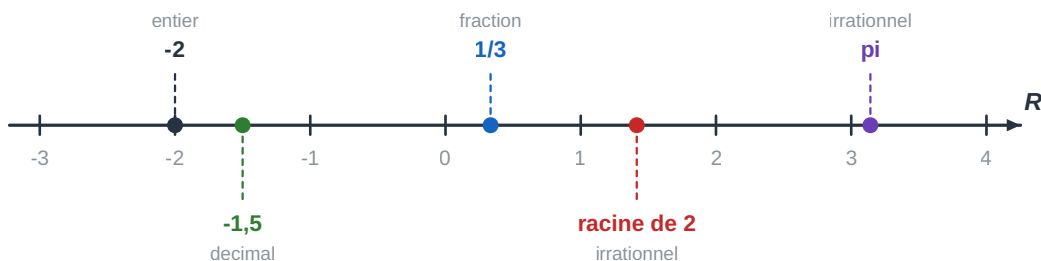
JE M'ÉCHAUFFE — Calcul mental

Fais ces calculs de tête, sans rien poser sur ta feuille. Tu as 3 minutes ! Les corrigés sont en bas de page.

1.	$(-7) + (+12) = \dots$	6.	$\sqrt{9 \times 4} = \dots$
2.	$(-5) \times (-4) = \dots$	7.	$10^3 \times 10^2 = \dots$
3.	$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \dots$	8.	Ecriture scientifique de 4 500 = ...
4.	La moitié de $\frac{2}{3} = \dots$	9.	$(x + 5)^2 = \dots$
5.	$\sqrt{36} = \dots$	10.	Un ordre de grandeur de $198 \times 5,1 = \dots$

Corrigés du calcul mental : **1) $+5$; 2) $+20$; 3) 1 ; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 6 ; 6) 6 ; 7) 10^5 ; 8) $4,5 \times 10^3$; 9) $x^2 + 10x + 25$; 10) environ 2000. $10001 = 5 \times 2000$

Tous ces nombres habitent la même droite : l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels



A chaque point de la droite correspond un nombre réel, et un seul.

Chaque jour, au marché, à l'atelier ou au champ, on **compte**, on **mesure**, on **compare** et on **estime**. Le prix d'un sac de mil se situe « entre 12 000 et 15 000 FCFA » ; la longueur d'une planche mesure « 2,3 m à un centimètre près » ; la diagonale d'un carré de 1 m de côté vaut $\sqrt{2}$ mètre, un nombre qui ne s'écrit pas comme une fraction. Tous ces nombres habitent un même ensemble : l'ensemble $\mathbb{R}$ **des nombres réels**.

Regarde bien ces trois exemples : aucun des trois ne donne un nombre « tout propre ». Le prix du mil n'est pas connu exactement, il est seulement **situé entre deux bornes**. La longueur de la planche n'est pas connue exactement non plus, elle est connue **à une erreur près** que l'on sait mesurer. Et $\sqrt{2}$, lui, existe parfaitement, mais aucune écriture décimale finie ne le donne. Voilà trois façons différentes de ne pas connaître un nombre « exactement », et pourtant, dans les trois cas, on peut travailler, calculer et décider. C'est tout l'objet de ce chapitre.

Au collège, tu as surtout appris à **calculer** : trouver le résultat, un point c'est tout. En 2^{nde} C, tu vas apprendre autre chose, qui est le vrai métier du scientifique : **situer** un nombre et **contrôler** un résultat. Situer un nombre, c'est dire entre quelles bornes il se trouve, à quelle distance il est d'un autre, s'il est plus grand ou plus petit que tel repère. Contrôler un résultat, c'est savoir avant de calculer l'ordre de grandeur qu'on doit trouver, de façon à repérer immédiatement une réponse aberrante.

Ces gestes portent des noms, et tu vas les apprendre un par un : **comparer**, **encadrer**, **majorer**, **approcher**. Ce sont les tout premiers outils de l'**Analyse**, la branche des mathématiques que tu commences cette année et qui t'accompagnera jusqu'au baccalauréat et au delà. Ils ne serviront pas qu'en mathématiques : le technicien qui règle une machine, le commerçant qui fixe un prix et l'agronome qui prévoit une récolte font exactement le même travail d'encadrement.

SOMMAIRE

Sommaire du chapitre :

Leçon 1 : Ordre et comparaison dans $\mathbb{R}$

Leçon 2 : Intervalles, valeur absolue et distance

Leçon 3 : Majorant, minorant, maximum et minimum

Leçon 4 : Encadrement et calcul approché

Leçon 5 : Pour aller plus loin, nombres irrationnels et partie entière

Leçon 6 : Pour aller plus loin, identités de degré 3 et triangle de Pascal

UN PEU D'HISTOIRE

Pendant longtemps, on a cru que tout nombre était une fraction. Les mathématiciens grecs, autour de Pythagore (vers 500 avant notre ère), eurent une surprise désagréable : la **diagonale d'un carré** de côté 1 ne peut s'écrire comme aucune fraction. Ce nombre, que nous notons aujourd'hui $\sqrt{2}$, est dit **irrationnel**. La légende raconte que la découverte fut d'abord tenue secrète, tant elle bousculait la conviction de l'école pythagoricienne selon laquelle « tout est nombre entier ou rapport d'entiers ». Il a fallu plus de vingt siècles pour que les mathématiciens construisent proprement l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, celui qui contient à la fois les fractions et ces nombres nouveaux.

Le mot « **algèbre** » vient de l'arabe *al-jabr*, tiré du titre d'un livre du savant **al-Khwârizmî** (Bagdad, IX^e siècle), dont le nom a aussi donné le mot « **algorithme** ». C'est en partie grâce aux mathématiciens du monde arabo-musulman que le **système décimal** et le **zéro**, venus de l'Inde, se sont répandus jusqu'en Afrique de l'Ouest, où les marchands transsahariens les utilisaient déjà pour leurs comptes. Les chroniques de Tombouctou et de Gao montrent des livres de comptes tenus en chiffres décimaux, avec des conversions entre mesures de sel, d'or et de mil : c'était déjà du calcul approché, avec des ordres de grandeur.

Aujourd'hui encore, écrire 4 500 sous la forme $4,5 \times 10^3$ est un héritage direct de cette longue histoire du calcul. Et le souci de la **précision** que tu vas apprendre dans ce chapitre est celui de tous les métiers : le pharmacien qui dose un sirop, le maçon qui coule une dalle et l'ingénieur du barrage de Bagré travaillent tous avec des encadrements, jamais avec des nombres exacts.

CE QUE TU DOIS DÉJÀ SAVOIR

Avant de commencer, vérifie que tu sais faire ces exercices. Si tu butes, lis l'encadré Rappel correspondant. Les corrigés sont en fin de chapitre.

Prérequis 1. Calcule : $(-3) \times (+5)$; puis $7 - 2 \times (-4)$. (Voir Rappel A.)

Prérequis 2. Calcule et donne le résultat sous forme de fraction irréductible : $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$; puis $\frac{5}{6} \times \frac{3}{10}$. (Voir Rappel A.)

Prérequis 3. Calcule : $\sqrt{49}$; $\sqrt{16 \times 25}$; puis écris $\sqrt{18}$ plus simplement. (Voir Rappel B.)

Prérequis 4. Ecris $10^5 \times 10^3$ sous la forme d'une puissance de 10, puis donne l'écriture scientifique de 32 000. (Voir Rappel B.)

Prérequis 5. Range dans l'ordre croissant : -3 ; 0 ; $-\frac{1}{2}$; 2 ; $-\frac{5}{4}$.

Prérequis 6. Calcule ou simplifie : a) $(-3)^2$ et $(-3)^3$; b) 5^0 ; c) 2^{-3} ; d) $(a^2)^3$; e) $(2x^3)^4$; f) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$. (Voir Rappel C.)

RAPPEL — Calculer dans $\mathbb{R}$: relatifs et fractions

Ce qu'il faut se souvenir. Même signe donne un produit positif ; signes contraires donnent un produit négatif. On effectue d'abord les parenthèses, puis les puissances, puis $\times$ et $\div$, enfin $+$ et $-$. Pour additionner deux fractions, on les réduit au même dénominateur ; pour multiplier, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux ; pour diviser, on multiplie par l'inverse.

Mini-exemple. $(-6) \times (+4) = -24$; $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$; $\frac{3}{4} \div \frac{6}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

Vérifie toi-même. a) $(-8) \times (-3)$; b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; c) $\frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$

Corrigés : a) $+24$; b) $\frac{5}{6}$; c) $\frac{6}{5}$.

RAPPEL — Puissances de 10, écriture scientifique et racine carrée

Ce qu'il faut se souvenir. $a^m \times a^n = a^{m+n}$ et $a^m \div a^n = a^{m-n}$. L'écriture scientifique d'un nombre est de la forme $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$. Pour $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a ; $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$; $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$. Pour simplifier une racine, on sort le plus grand carré parfait.

Mini-exemple. $10^4 \times 10^2 = 10^6$; $32\,000 = 3,2 \times 10^4$; $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = 3\sqrt{2}$.

Vérifie toi-même. a) $2^3 \times 2^4$; b) écriture scientifique de 0,0045 ; c) simplifie $\sqrt{50}$

Corrigés : a) $2^7 = 128$; b) $4,5 \times 10^{-3}$; c) $5\sqrt{2}$.

RAPPEL — Puissances entières

Définition. Pour un réel a et un entier $n \geq 1$: $a^n = a \times a \times \cdots \times a$ (le facteur a est répété n fois). Par convention, $a^0 = 1$ (avec $a \neq 0$) et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (avec $a \neq 0$). En particulier $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Les règles à connaître.

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$
- $(a \div b)^n = a^n \div b^n$

Signe d'une puissance. Si n est **pair**, $(-a)^n = a^n$; si n est **impair**, $(-a)^n = -a^n$. Ainsi $(-1)^n = 1$ si n est pair, et -1 si n est impair.

Mini-exemple. $(2x^3)^4 = 2^4 \times x^{12} = 16x^{12}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$.

Attention. $(a + b)^2$ n'est pas $a^2 + b^2$! On a $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. La puissance se distribue sur un **produit** ou un **quotient**, jamais sur une **somme**.

Vérifie toi-même. a) $(-2)^4$; b) $(a^3)^2$; c) 10^{-2}

Corrigés : a) 16 ; b) a^6 ; c) $\frac{1}{100}$.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

A la fin de ce chapitre, tu seras capable de :

Savoir (cognitif)

- Connaître les ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et leur emboîtement.
- Connaître les propriétés de la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ vis-à-vis des opérations, du passage au carré, à l'inverse et à la racine carrée.
- Connaître la définition et les propriétés de la valeur absolue, et l'interprétation de $|b - a|$ comme distance.
- Connaître les notions de majorant, minorant, élément maximal, élément minimal d'une partie de $\mathbb{R}$.

Savoir-faire théorique

- Calculer dans $\mathbb{D}$ et $\mathbb{R}$ (puissances entières de 10, puissances entières d'un réel, racines carrées).
- Comparer deux réels ; comparer x , x^2 , $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$ pour $x > 0$.
- Reconnaître si un réel est un majorant, un minorant, un maximum ou un minimum d'une partie de $\mathbb{R}$.
- Interpréter $|b - a|$ comme la distance des points a et b ; effectuer quelques majorations simples (inégalité triangulaire, valeur absolue d'un produit et d'un quotient).
- Effectuer des encadrements (somme, différence, produit, quotient de réels strictement positifs) et donner une valeur approchée à une précision donnée.
- *Pour aller plus loin* : comparer des réels **négatifs** ; reconnaître un **irrationnel** et démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$; déterminer la **partie entière** $E(x)$ d'un réel.

Savoir-faire pratique

- Représenter un intervalle et un encadrement sur une droite graduée.
- Etudier le signe d'un produit ou d'un quotient à l'aide d'un tableau de signes.
- Organiser un calcul (choisir un programme adapté, des valeurs approchées qui conviennent, déceler un résultat aberrant).

LECON 1 : Ordre et comparaison dans $\mathbb{R}$

Activité de découverte — Le meilleur prix au marché de Koudougou

Au marché de Koudougou, Aminata compare le prix du kilogramme de tomates chez trois vendeuses. Chez la première, 5 kg coûtent 1 750 FCFA ; chez la deuxième, le kilogramme est affiché à 360 FCFA ; chez la troisième, 3 kg coûtent 1 020 FCFA.

1. Calcule le prix d'un kilogramme chez chacune des trois vendeuses.
2. Range ces trois prix dans l'ordre croissant. Chez qui Aminata doit-elle acheter ?
3. Moussa affirme : « pour comparer deux nombres, il suffit de regarder leur **différence** : si $a - b$ est positif, alors a est plus grand que b . » A-t-il raison ? Vérifie sur deux des prix trouvés.
4. Aminata écrit le prix chez la deuxième vendeuse sous la forme $\frac{360}{1}$, celui de la première sous la forme $\frac{1750}{5}$. Ces deux écritures sont-elles des fractions ? Un prix peut-il ne pas être une fraction ?

(Ne regarde pas la suite avant d'avoir cherché.)

Ce que l'activité met en évidence

La première chose que fait Aminata, sans y penser, c'est de **ramener les trois offres à une même unité**. Tant que l'une est donnée pour 5 kg, l'autre pour 1 kg et la troisième pour 3 kg, les trois nombres 1 750, 360 et 1 020 ne sont tout simplement pas comparables. On ne compare que ce qui est de même nature. C'est le premier réflexe du chapitre, et c'est aussi le premier réflexe du commerçant.

Une fois les trois prix ramenés au kilogramme, la question 2 demande de les **ranger**. Ranger, c'est déjà utiliser une relation d'ordre : entre deux nombres réels, il y en a toujours un qui est plus petit, ou bien ils sont

égaux. On dit que l'ordre sur $\mathbb{R}$ est **total** : il ne laisse jamais deux nombres « à égalité de rang » sans qu'ils soient égaux. Cette propriété paraît évidente, mais elle est très forte et elle sera utilisée en permanence.

La question 3 introduit l'outil central de la leçon. Moussa a raison, et sa remarque ne relève pas de l'astuce : c'est la **définition même** de l'ordre dans $\mathbb{R}$. Dire que a est plus grand que b , ce n'est rien d'autre que dire que la différence $a - b$ est un nombre strictement positif. L'intérêt est immense : comparer deux nombres compliqués devient un problème de **signe**, et étudier un signe est souvent bien plus facile que de calculer deux valeurs décimales.

La question 4 ouvre une porte sur autre chose. Les trois prix trouvés sont des fractions, et même des nombres décimaux. Mais tous les nombres ne sont pas de ce type : la diagonale d'un carré de 1 mètre de côté vaut $\sqrt{2}$, et aucune fraction n'est égale à $\sqrt{2}$. Avant de comparer, il faut donc savoir **dans quel ensemble** on travaille. C'est par là que commence la leçon : d'abord les ensembles de nombres, puis la comparaison, puis les règles qui disent ce que les opérations font à une inégalité.

A. Les ensembles de nombres

CE QU'IL FAUT RETENIR

Les cinq ensembles de nombres.

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des **entiers naturels** : 0, 1, 2, 3, ... Ce sont les nombres qui servent à compter.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des **entiers relatifs** : les entiers naturels et leurs opposés, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...
- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des **nombres décimaux** : ceux qui s'écrivent $\frac{a}{10^n}$ avec a entier relatif et n entier naturel, autrement dit ceux dont l'écriture décimale s'arrête. Par exemple $3,25 = \frac{325}{100}$.
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des **nombres rationnels** : ceux qui s'écrivent $\frac{p}{q}$ avec p entier relatif et q entier naturel non nul. Par exemple $\frac{1}{3}$.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des **nombres réels** : tous les nombres qui repèrent un point de la droite graduée.

Ces ensembles sont **emboîtés** les uns dans les autres :

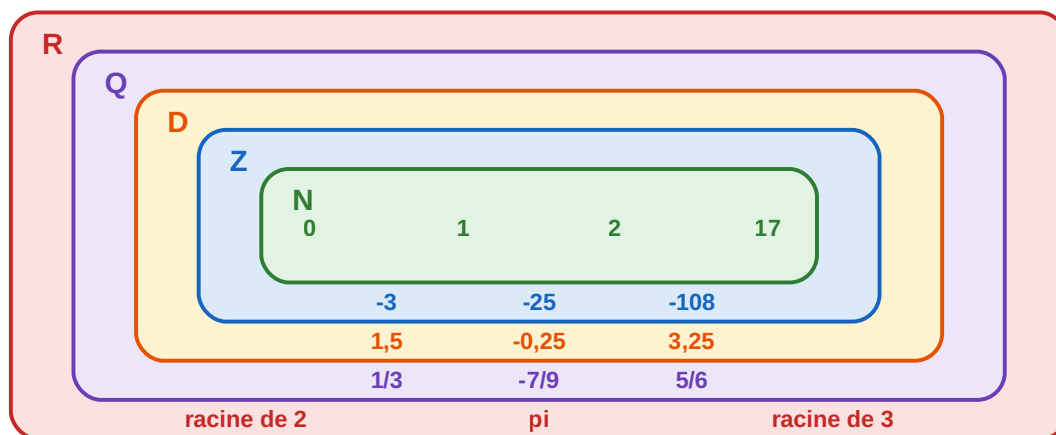
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Le symbole $\in$ se lit « appartient à » et le symbole $\notin$ se lit « n'appartient pas à ». On écrit par exemple $-7 \in \mathbb{Z}$ et $-7 \notin \mathbb{N}$.

Lis bien le sens de ces inclusions : chaque ensemble contient tout le précédent, et il contient **en plus** des nombres nouveaux. Passer de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, c'est gagner le droit de soustraire sans condition, car $3 - 5$ n'existe pas dans $\mathbb{N}$ mais vaut -2 dans $\mathbb{Z}$. Passer de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$, c'est gagner le droit de diviser par tout nombre non nul, car $3 \div 5$ n'existe pas dans $\mathbb{Z}$ mais vaut $\frac{3}{5}$ dans $\mathbb{Q}$. Chaque agrandissement répond donc à un besoin de calcul très concret.

Le dernier passage, celui de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, est d'une autre nature. Il ne sert pas à rendre une opération possible : il sert à **boucher les trous de la droite graduée**. Si l'on ne gardait que les rationnels, la droite serait comme un tissu troué : le point situé à la distance $\sqrt{2}$ de l'origine, pourtant parfaitement constructible à la règle et au compas, n'aurait aucun nombre pour le repérer. Les réels sont exactement ce qu'il faut pour qu'à **chaque point de la droite** corresponde **un nombre et un seul**.

Les ensembles de nombres sont emboîtés



Attention enfin à une confusion courante : un nombre peut avoir plusieurs écritures, et c'est l'écriture la plus simple qui décide. Le nombre $\sqrt{9}$ a l'air irrationnel à cause du radical, mais $\sqrt{9} = 3$, donc $\sqrt{9} \in \mathbb{N}$. De même $-\frac{2}{4}$ a l'air d'être seulement rationnel, mais $-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$, qui est décimal : $-\frac{2}{4} \in \mathbb{D}$. Avant de répondre, on simplifie toujours.

MÉTHODE : RECONNAÎTRE À QUELS ENSEMBLES APPARTIENT UN NOMBRE

Étape 1 : Simplifie d'abord l'écriture du nombre le plus loin possible : effectue les racines exactes, réduis les fractions, développe si c'est utile.

Étape 2 : Demande-toi ensuite, dans cet ordre : est-ce un entier positif ou nul ? un entier relatif ? un décimal ? une fraction ? Le premier « oui » donne le plus petit ensemble qui convient.

Étape 3 : N'oublie pas que le nombre appartient alors **aussi** à tous les ensembles suivants, puisqu'ils sont emboîtés. Un entier naturel est en particulier un réel.

Étape 4 : Pour répondre « n'appartient pas », il faut une **raison** : $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ parce qu'on démontre qu'aucune fraction n'a pour carré 5 (voir la Leçon 5).

Exemple résolu 1 : classer des nombres

Enoncé. Pour chacun des nombres -4 ; $\frac{6}{4}$; $\sqrt{16}$; $\frac{1}{3}$; $\sqrt{5}$, indique le plus petit des ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ auquel il appartient.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Le nombre -4 est un entier, mais il est négatif : il n'est donc pas dans $\mathbb{N}$, qui ne contient que les entiers positifs ou nuls.	$-4 \in \mathbb{Z}$, et $-4 \notin \mathbb{N}$.
On simplifie $\frac{6}{4}$ par 2 avant de conclure. Le résultat 1,5 a une écriture décimale qui s'arrête : c'est un décimal.	$\frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$, donc $\frac{6}{4} \in \mathbb{D}$.
Le radical ne doit pas faire peur : 16 est un carré parfait, la racine est un entier naturel.	$\sqrt{16} = 4$, donc $\sqrt{16} \in \mathbb{N}$.
$\frac{1}{3}$ est une fraction irréductible dont le dénominateur n'est pas une puissance de 10 : son écriture décimale $0,333\dots$ ne s'arrête jamais. Ce n'est donc pas un décimal.	$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, et $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$.
5 n'est pas un carré parfait et l'on démontre que $\sqrt{5}$ n'est aucune fraction : il n'est donc dans aucun des quatre premiers ensembles.	$\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ seulement .

Vérification. On peut contrôler chaque réponse en se demandant à quel endroit de la droite graduée le nombre se place, et si ce point tombe sur une graduation entière, sur une graduation en dixièmes, ou sur aucune graduation simple. Ici -4 tombe sur une graduation entière, 1,5 tombe sur une graduation en dixièmes, $\frac{1}{3}$ et $\sqrt{5}$ ne tombent sur aucune graduation décimale, si fine soit-elle.

B. Comparer deux réels

CE QU'IL FAUT RETENIR

Comparer deux réels. Pour deux réels a et b :

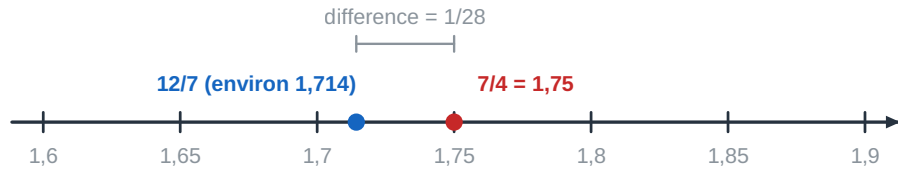
- $a < b$ signifie que la différence $b - a$ est **strictement positive**, c'est-à-dire $b - a > 0$;
- $a > b$ signifie $b - a < 0$;
- $a = b$ signifie $b - a = 0$.

Comparer a et b , c'est donc étudier le **signe de la différence** $a - b$. Lorsque a et b sont tous deux strictement positifs, on peut aussi comparer le **quotient** $\frac{a}{b}$ à 1 : si $\frac{a}{b} > 1$, alors $a > b$.

Cet encadré ne décrit pas une astuce parmi d'autres : il donne la **définition officielle** de l'ordre dans $\mathbb{R}$. Retiens bien pourquoi elle est commode. Comparer $\frac{7}{4}$ et $\frac{12}{7}$ en calculant leurs écritures décimales demande deux divisions, et l'on tombe sur 1,75 et 1,714..., valeurs approchées dont il faut ensuite vérifier qu'elles suffisent à trancher. En passant par la différence, une seule mise au même dénominateur donne $\frac{1}{28}$, un nombre dont le signe est visible d'un coup d'oeil, et la comparaison est alors **exacte**, sans aucune approximation.

La deuxième méthode, celle du quotient, n'est valable **que pour deux nombres strictement positifs**. La raison est simple : si b est négatif, diviser par b retourne le sens de l'inégalité et le critère devient faux. Retiens donc que la différence marche toujours, tandis que le quotient est un raccourci réservé aux positifs.

Comparer, c'est étudier le signe de la différence (zoom sur l'axe)



7/4 moins 12/7 est positif, donc 7/4 est le plus grand

Sur la droite graduée, le plus grand est toujours le plus à droite.

MÉTHODE : COMPARER DEUX RÉELS PAR LA DIFFÉRENCE

Étape 1 : Forme la différence $a - b$, en recopiant soigneusement les signes. Une différence de deux nombres négatifs comme $-\frac{5}{7} - \left(-\frac{7}{9}\right)$ devient une addition : $-\frac{5}{7} + \frac{7}{9}$.

Étape 2 : Transforme cette différence pour en connaître le **signe** : réduction au même dénominateur pour des fractions, développement puis factorisation pour des expressions littérales, utilisation d'une identité remarquable si tu en reconnais une.

Étape 3 : Lis le signe du résultat obtenu. Une fraction est positive lorsque son numérateur et son dénominateur sont de même signe.

Étape 4 : Conclus : si $a - b > 0$, alors $a > b$; si $a - b < 0$, alors $a < b$; si $a - b = 0$, alors $a = b$.

Étape 5 : Contrôle enfin ton résultat par des valeurs approchées grossières. Ce contrôle ne remplace pas la démonstration, mais il détecte les erreurs de signe.

Exemple résolu 2 : comparer deux fractions positives

Énoncé. Compare les deux réels $A = \frac{7}{4}$ et $B = \frac{12}{7}$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On forme la différence $A - B$, sans chercher à calculer chaque fraction séparément.	$A - B = \frac{7}{4} - \frac{12}{7}$
Pour soustraire deux fractions, il faut un dénominateur commun. Le plus simple ici est le produit $4 \times 7 = 28$.	$A - B = \frac{49}{28} - \frac{48}{28} = \frac{1}{28}$
Le numérateur 1 et le dénominateur 28 sont tous deux positifs : la fraction est strictement positive.	$A - B = \frac{1}{28} > 0$
Une différence strictement positive signifie que le premier nombre est le plus grand.	Donc $\frac{7}{4} > \frac{12}{7}$.

Vérification. En valeurs approchées, $\frac{7}{4} = 1,75$ et $\frac{12}{7} \approx 1,714$. On a bien $1,75 > 1,714$. Remarque au passage que l'écart $\frac{1}{28} \approx 0,036$ est petit : c'est pourquoi une comparaison faite avec des valeurs approchées trop grossières, arrondies au dixième par exemple, aurait donné 1,8 et 1,7, donc la bonne réponse, mais par chance. La différence, elle, tranche à coup sûr.

Exemple résolu 3 : comparer deux nombres négatifs

Enoncé. Compare les réels $A = -\frac{5}{7}$ et $B = -\frac{7}{9}$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On forme la différence. Soustraire un nombre négatif revient à ajouter son opposé : c'est le point où l'on se trompe le plus souvent.	$A - B = -\frac{5}{7} - \left(-\frac{7}{9}\right), \text{ soit}$ $A - B = -\frac{5}{7} + \frac{7}{9}$
On réduit au même dénominateur $7 \times 9 = 63$.	$A - B = -\frac{45}{63} + \frac{49}{63} = \frac{4}{63}$
Le résultat est une fraction à numérateur et dénominateur positifs, donc strictement positive.	$A - B = \frac{4}{63} > 0$
La différence étant positive, A est le plus grand des deux.	Donc $-\frac{5}{7} > -\frac{7}{9}$.

Interprétation. Ce résultat surprend souvent, car 7 et 9 sont plus grands que 5 et 7. Place les deux nombres sur la droite graduée : $-\frac{5}{7} \approx -0,714$ et $-\frac{7}{9} \approx -0,778$. Le second est plus loin de zéro, donc plus à gauche, donc plus petit. Retiens la règle sous cette forme : **de deux nombres négatifs, le plus grand est celui qui est le plus proche de zéro.**

C. L'ordre et les opérations

CE QU'IL FAUT RETENIR

Ordre et addition. Pour tous réels a , b et c : si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$. Ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité **ne change jamais** son sens, que ce nombre soit positif ou négatif.

Ordre et multiplication. Pour tous réels a et b tels que $a \leq b$:

- si $c > 0$, alors $ac \leq bc$: multiplier par un nombre **strictement positif conserve** le sens ;
- si $c < 0$, alors $ac \geq bc$: multiplier par un nombre **strictement négatif inverse** le sens.

La règle de l'addition se comprend d'un seul regard sur la droite graduée : ajouter c à tous les nombres revient à **glisser toute la droite** de c vers la droite (si c est positif) ou vers la gauche (si c est négatif). Un glissement d'ensemble ne peut évidemment pas échanger l'ordre de deux points. Ajouter est donc l'opération la plus sûre du chapitre.

La règle de la multiplication demande plus d'attention, et c'est là que se logent presque toutes les erreurs de l'année. Multiplier par un nombre positif revient à étirer la droite en gardant le sens de la marche : l'ordre survit. Multiplier par un nombre négatif revient à étirer **et à retourner** la droite comme on retourne un pagne : la gauche devient la droite, donc le plus petit devient le plus grand. Vérifie sur un exemple minuscule chaque fois que tu hésites : de $2 < 5$ on tire $-2 > -5$, en multipliant par -1 .

CE QU'IL FAUT RETENIR

Passage au carré, à l'inverse, à la racine carrée.

- Si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$: sur les réels **positifs**, le passage au carré **conserve** l'ordre.
- Si $0 \leq a \leq b$, alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$: le passage à la racine carrée **conserve** l'ordre.
- Si $0 < a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$: sur les réels **strictement positifs**, le passage à l'inverse **inverse** l'ordre.
- Si $a \leq b \leq 0$, alors $a^2 \geq b^2$: sur les réels **négatifs**, le passage au carré **inverse** l'ordre.

Les deux premières propriétés sont les plus faciles à admettre : plus un carré de côté a est grand, plus son aire a^2 est grande, et réciproquement. La troisième se comprend avec un partage : si l'on partage un même gâteau entre a personnes ou entre b personnes avec b plus grand, chaque part $\frac{1}{b}$ est plus petite. Plus il y a de convives, moins il y a dans l'assiette.

La quatrième est la plus dangereuse. Prends $a = -5$ et $b = -2$: on a bien $a \leq b \leq 0$, et pourtant $a^2 = 25$ tandis que $b^2 = 4$. Le carré a retourné l'ordre. La raison est que le carré efface le signe : il ne mesure plus la position du nombre, mais son **éloignement à zéro**. Or -5 est plus loin de zéro que -2 . On retrouvera exactement cette idée d'éloignement à la Leçon 2 sous le nom de valeur absolue.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). x est un réel strictement compris entre 0 et 1. On peut garder en tête l'exemple $x = \frac{1}{4}$, mais le raisonnement qui suit ne l'utilise pas : il vaut pour **tous** les x de cet intervalle.

Outil (la propriété que j'utilise). On peut multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre strictement positif sans changer le sens, et le passage à l'inverse sur les nombres strictement positifs inverse le sens.

Conclusion (ce que j'en déduis). Partons de $0 < x < 1$ et multiplions les trois membres par x , qui est strictement positif : le sens est conservé et l'on obtient $0 < x^2 < x$. Le carré d'un nombre plus petit que 1 est donc **plus petit** que ce nombre, ce qui est le contraire de ce qu'on croit spontanément. Ensuite, comme $x < 1$, le passage à l'inverse donne $\frac{1}{x} > 1$. Enfin, $\sqrt{x}$ se place entre x et 1 : en effet $(\sqrt{x})^2 = x < \sqrt{x}$ d'après ce qui précède appliqué à $\sqrt{x}$, qui est lui aussi entre 0 et 1. On obtient le classement complet :

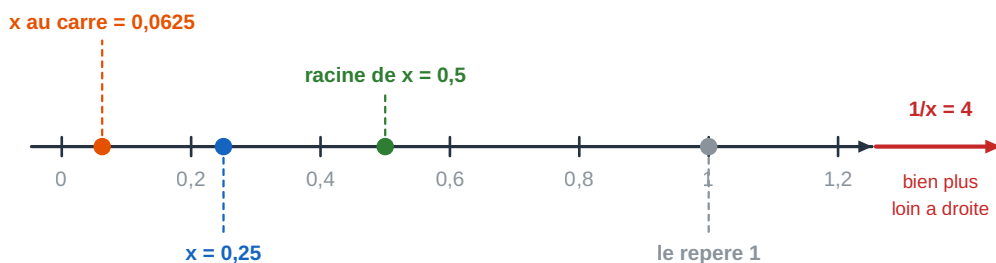
$$x^2 < x < \sqrt{x} < 1 < \frac{1}{x}.$$

Avec $x = \frac{1}{4}$ on lit $\frac{1}{16} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} < 1 < 4$, ce qui confirme.

Rédaction type. « On sait que $0 < x < 1$. Or multiplier une inégalité par le réel strictement positif x en conserve le sens. Donc $0 < x^2 < x$. »

Quel type de raisonnement ? C'est une **déduction directe** : on part d'une hypothèse et d'une propriété du cours, et on enchaîne. Remarque que l'exemple $x = \frac{1}{4}$ ne démontre rien du tout, il ne fait qu'illustrer. Des exemples ne prouvent jamais une propriété générale, alors qu'un seul contre-exemple suffit à la détruire. Pour $x > 1$, tout le classement se renverse et devient $\frac{1}{x} < 1 < \sqrt{x} < x < x^2$.

Pour x compris entre 0 et 1 : le carré descend, la racine monte, l'inverse s'envole



Classement : $x \text{ au carré} < x < \text{racine de } x < 1 < 1/x$

Exemple résolu 4 : comparer deux nombres avec un radical

Enoncé. Compare $\sqrt{7}$ et $\frac{8}{3}$, sans en chercher les valeurs décimales.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Les deux nombres sont strictement positifs. Le passage au carré conserve donc l'ordre : comparer les nombres revient à comparer leurs carrés, ce qui fera disparaître le radical.	$(\sqrt{7})^2 = 7$ et $\left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9}$.
On compare 7 et $\frac{64}{9}$ par la différence, en écrivant $7 = \frac{63}{9}$.	$7 - \frac{64}{9} = \frac{63}{9} - \frac{64}{9}$, soit $-\frac{1}{9} < 0$.
La différence est négative, donc 7 est le plus petit des deux carrés.	$7 < \frac{64}{9}$.
Comme les deux nombres de départ sont positifs, l'inégalité des carrés se transporte aux nombres eux-mêmes.	Donc $\sqrt{7} < \frac{8}{3}$.

Vérification. L'écart entre les carrés vaut $\frac{1}{9} \approx 0,11$, il est donc net et ne peut pas venir d'une erreur d'arrondi. On peut ajouter un contrôle grossier : $\frac{8}{3} \approx 2,67$ et $2,67^2 \approx 7,1$, un peu plus que 7. Les deux chemins concordent. Retiens le geste : pour comparer des nombres positifs contenant des radicaux, on **élève au carré**.

D. Puissances et radicaux

CE QU'IL FAUT RETENIR

Puissances entières. Pour un réel a non nul et un entier relatif n , on rappelle les cinq règles de calcul :

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}; \quad (a^m)^n = a^{mn}; \quad (ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Avec les conventions $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Écriture scientifique. L'écriture scientifique d'un nombre non nul est son écriture sous la forme $a \times 10^n$, où n est un entier relatif et où a vérifie $1 \leq |a| < 10$: il y a donc **un seul chiffre non nul avant la virgule**.

L'écriture scientifique n'est pas une coquetterie de présentation : elle sert à comparer et à multiplier des nombres très grands ou très petits sans se perdre dans les zéros. Comparer 0,00000103 et 0,0000098 demande de compter les zéros un par un ; comparer $1,03 \times 10^{-6}$ et $9,8 \times 10^{-6}$ est immédiat. C'est pour cette raison que toutes les sciences l'emploient.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Racine carrée. Pour un réel a positif ou nul, $\sqrt{a}$ est l'unique nombre **positif** dont le carré vaut a . Ainsi $(\sqrt{a})^2 = a$, et $\sqrt{a} \geq 0$ toujours.

Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ pour } b > 0; \quad \sqrt{a^2} = |a|.$$

Attention : il n'existe **aucune** formule pour $\sqrt{a+b}$: la racine ne se distribue pas sur une somme.

Equation $x^2 = a$. Si $a > 0$, elle a exactement deux solutions, $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Si $a = 0$, une seule, 0. Si $a < 0$, aucune solution réelle.

La racine carrée se comporte donc comme la valeur absolue : très bien avec le produit et le quotient, très mal avec la somme. Retiens le contre-exemple qui tranche : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. Un seul contre-exemple suffit à détruire la fausse formule, et celui-ci se retient facilement puisqu'il ne fait intervenir que des entiers.

Retiens aussi que $\sqrt{a}$ n'est pas toujours irrationnel, et qu'un radical n'est pas forcément la forme la plus simple : $\sqrt{16} = 4$ et $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Simplifier un radical, c'est en **sortir le plus grand carré parfait** contenu dans le nombre sous la racine.

MÉTHODE : SIMPLIFIER UN RADICAL ET RENDRE RATIONNEL UN DÉNOMINATEUR

Étape 1 : Pour **simplifier** $\sqrt{n}$: décompose n en un produit dont l'un des facteurs est le plus grand carré parfait possible, puis sors ce carré de la racine. Par exemple $\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$.

Étape 2 : Pour **additionner** des radicaux, simplifie-les d'abord : ils ne s'additionnent que s'ils ont le même radicande, comme $4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Étape 3 : Pour **rendre rationnel** un dénominateur de la forme $\sqrt{b}$, multiplie le numérateur et le dénominateur par $\sqrt{b}$: le dénominateur devient b , qui est entier.

Étape 4 : Pour un dénominateur de la forme $a + \sqrt{b}$, multiplie les deux termes de la fraction par la **quantité conjuguée** $a - \sqrt{b}$. Le produit $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$ ne contient plus de radical, car c'est une identité remarquable.

Étape 5 : Contrôle toujours que tu n'as pas changé la valeur du nombre : tu as multiplié par une fraction égale à 1, donc le résultat doit être le même en valeur approchée.

Exemple résolu 5 : simplifier, puis rationaliser

Enoncé. 1) Simplifie $\sqrt{18}$ et $\sqrt{75}$. 2) Rends rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, puis de $\frac{2}{1 + \sqrt{3}}$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On cherche le plus grand carré parfait qui divise 18. C'est 9, et non 4 qui ne divise pas 18.	$\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2}$, soit $3\sqrt{2}$.
Même travail avec 75 : le plus grand carré parfait qui le divise est 25.	$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}$.
Pour $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on multiplie en haut et en bas par $\sqrt{2}$, ce qui revient à multiplier par 1 et ne change donc pas le nombre.	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$, soit $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Pour $\frac{2}{1 + \sqrt{3}}$, le dénominateur est une somme : on utilise la quantité conjuguée $1 - \sqrt{3}$, qui fera apparaître l'identité $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$.	$\frac{2(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})}$, avec $(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3$.
Le dénominateur vaut -2 : on simplifie et l'on fait attention au signe.	$\frac{2(1 - \sqrt{3})}{-2} = \sqrt{3} - 1$.

Vérification. On contrôle en valeurs approchées, avec $\sqrt{3} \approx 1,73$. D'un côté $\frac{2}{1 + 1,73} = \frac{2}{2,73} \approx 0,73$; de l'autre $\sqrt{3} - 1 \approx 0,73$. Les deux écritures donnent bien le même nombre, et la seconde est la plus commode, car elle ne comporte plus de radical au dénominateur.

E. Signe d'un produit et d'un quotient

CE QU'IL FAUT RETENIR

Signe d'un produit. Un produit de deux facteurs est **positif** lorsque les deux facteurs sont de même signe, **négatif** lorsqu'ils sont de signes contraires, et **nul** lorsque l'un des facteurs est nul.

Signe d'un quotient. La même règle s'applique au quotient $\frac{u}{v}$, à ceci près que la valeur qui annule le dénominateur est **interdite** : on la marque d'une double barre dans le tableau.

Tableau de signes. Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient de facteurs du premier degré, on porte sur une même ligne les valeurs qui annulent chaque facteur, rangées dans l'ordre croissant, puis on donne le signe de chaque facteur sur chaque intervalle, et l'on conclut par la règle des signes.

Un facteur du premier degré $ax + b$ change de signe **une seule fois**, à la valeur $x = -\frac{b}{a}$ qui l'annule.

Avant cette valeur il a un signe, après il a l'autre, et lequel des deux dépend uniquement du signe de a : le facteur est du signe de a après la racine. Voilà pourquoi le tableau suffit à tout dire : il n'y a qu'un nombre fini de « moments » où quelque chose change.

MÉTHODE : ETUDIER LE SIGNE D'UN PRODUIT OU D'UN QUOTIENT

Étape 1 : Factoriser l'expression si elle ne l'est pas déjà : un tableau de signes ne se dresse que sur un produit ou un quotient de facteurs simples.

Étape 2 : Cherche la valeur qui **annule chaque facteur** en résolvant une petite équation du premier degré.

Étape 3 : Range ces valeurs dans l'**ordre croissant** sur la première ligne du tableau, avec $-\infty$ à gauche et $+\infty$ à droite.

Étape 4 : Remplis une ligne par facteur, en indiquant son signe avant et après sa racine, puis une ligne pour l'expression complète, obtenue par la règle des signes.

Étape 5 : Marque d'une **double barre** toute valeur interdite au dénominateur, et d'un zéro toute valeur qui annule le numérateur.

Étape 6 : Rédige la conclusion en phrases, en décrivant les intervalles où l'expression est positive et ceux où elle est négative.

Exemple résolu 6 : un produit de deux facteurs

Enoncé. Etudie le signe de $P(x) = (5 - 3x)(2x + 1)$ selon les valeurs du réel x .

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
L'expression est déjà factorisée. On cherche la valeur qui annule chacun des deux facteurs.	$5 - 3x = 0$ donne $x = \frac{5}{3}$; $2x + 1 = 0$ donne $x = -\frac{1}{2}$.
On range ces deux valeurs dans l'ordre croissant. Elles découpent la droite en trois morceaux.	$-\frac{1}{2} < \frac{5}{3}$, d'où les zones $x < -\frac{1}{2}$, puis $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{3}$, puis $x > \frac{5}{3}$.
Le facteur $5 - 3x$ a un coefficient -3 négatif devant x : il est donc positif avant sa racine et négatif après.	$5 - 3x > 0$ pour $x < \frac{5}{3}$, et $5 - 3x < 0$ pour $x > \frac{5}{3}$.
Le facteur $2x + 1$ a un coefficient 2 positif : il est négatif avant sa racine et positif après.	$2x + 1 < 0$ pour $x < -\frac{1}{2}$, et $2x + 1 > 0$ pour $x > -\frac{1}{2}$.
On applique la règle des signes zone par zone.	Zone 1 : positif par négatif, donc $P(x) < 0$. Zone 2 : positif par positif, donc $P(x) > 0$. Zone 3 : négatif par positif, donc $P(x) < 0$.

Vérification. On teste une valeur dans chaque zone, ce qui est le contrôle le plus rapide. Pour $x = -1$:

$P(-1) = 8 \times (-1) = -8 < 0$. Pour $x = 0$: $P(0) = 5 \times 1 = 5 > 0$. Pour $x = 2$:

$P(2) = (-1) \times 5 = -5 < 0$. Les trois signes concordent avec le tableau, et l'on retiendra que $P(x) \geq 0$

exactement sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; \frac{5}{3}\right]$.

ATTENTION !

Elever au carré ne conserve l'ordre que pour des nombres positifs.

✗ Faux : « $-2 < 3$ donc $(-2)^2 < 3^2$ », c'est-à-dire $4 < 9$. Ici la conclusion est vraie, mais par hasard : le raisonnement, lui, est faux, et il ne faut jamais s'appuyer dessus.

✗ Faux : « $-5 < 2$ donc $(-5)^2 < 2^2$ » donnerait $25 < 4$, ce qui est **faux**.

✓ Vrai : on ne passe au carré en gardant le sens que **si les deux nombres sont positifs**. Si $0 \leq a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$. Et si les deux nombres sont négatifs, le sens s'inverse.

ATTENTION !

Ne multiplie jamais une inégalité par un nombre dont tu ignores le signe.

✗ Faux : « de $a < b$ je déduis $ax < bx$ ». C'est vrai si $x > 0$, faux si $x < 0$, et l'inégalité devient une égalité si $x = 0$.

✓ Vrai : tant que le signe de x n'est pas connu, il faut **discuter les cas** ou bien transformer l'écriture. C'est exactement pour cette raison qu'on n'a pas le droit de « multiplier en croix » une inéquation à dénominateurs sans avoir d'abord étudié le signe de ces dénominateurs.

À TOI DE JOUER !

Exercice 1. Compare par la différence : a) $\frac{5}{3}$ et $\frac{8}{5}$; b) $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{11}$; c) $-\frac{5}{7}$ et $-\frac{7}{9}$; d) $-\frac{7}{4}$ et $-\frac{9}{5}$.

Exercice 2. On donne $x = 0,2$. Range dans l'ordre croissant les nombres x , x^2 , $\sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$ (on pourra utiliser des valeurs approchées pour vérifier).

LECON 2 : Intervalles, valeur absolue et distance

Activité de découverte — Sur la route de Gaoua

Sur la route nationale, on place un repère kilométrique : Bobo-Dioulasso est au point d'abscisse 0, et la ville de Gaoua au point d'abscisse 220. Wendlassida roule et se trouve au kilomètre 150.

1. A quelle distance Wendlassida est-elle de Bobo-Dioulasso ? A quelle distance de Gaoua ?
2. Sur la droite graduée, comment obtient-on la distance entre deux points à partir de leurs abscisses ? Ta règle marche-t-elle encore si l'on place l'origine à Gaoua, de sorte que Bobo-Dioulasso soit au kilomètre -220 ?
3. Un panneau indique : « aire de repos, tous les points situés à moins de 10 km du kilomètre 150 ». Entre quels kilomètres se trouve cette zone ? Essaie de l'écrire avec le symbole de distance.
4. Un second panneau annonce : « prochaine station-service, à plus de 10 km du kilomètre 150 ». Décris cette fois la zone concernée. Est-elle encore d'un seul tenant ?

Ce que l'activité met en évidence

À la question 1, tu as certainement soustrait : $150 - 0 = 150$ et $220 - 150 = 70$. La soustraction a fonctionné parce que, dans les deux cas, tu as pensé à retrancher le plus petit du plus grand. La question 2 montre que ce petit arrangement n'est pas satisfaisant : si l'origine change, les abscisses deviennent négatives et l'on ne sait plus d'avance lequel des deux nombres est le plus grand. Il faut donc un outil qui donne la distance **sans avoir à se demander qui est le plus grand**. Cet outil existe et s'appelle la **valeur absolue**.

L'idée est simple : la valeur absolue d'un nombre est ce nombre débarrassé de son signe, c'est-à-dire son éloignement à zéro. En écrivant la distance sous la forme $|b - a|$, on obtient toujours un nombre positif, quel que soit l'ordre de a et de b . Tu peux vérifier tout de suite sur l'activité : $|220 - 150| = |70| = 70$ et $|150 - 220| = |-70| = 70$. Les deux calculs donnent la même distance, ce qui est bien la moindre des choses pour une distance.

La question 3 opère alors le rapprochement central de la leçon. « Être à moins de 10 km du kilomètre 150 » se dit d'un côté avec une distance, $|x - 150| < 10$, et de l'autre avec un encadrement, $140 < x < 160$, c'est-à-dire par un **intervalle**. Ces deux écritures désignent exactement le même ensemble de points : la même zone de route. Tout l'art de cette leçon consiste à passer d'une écriture à l'autre sans hésiter, parce que selon le problème posé l'une des deux est toujours beaucoup plus commode.

La question 4 montre enfin ce qui se passe quand on prend la condition contraire. Les points à plus de 10 km du kilomètre 150 forment deux morceaux séparés : ceux qui sont avant le kilomètre 140, et ceux qui sont après le kilomètre 160. La zone n'est plus d'un seul tenant, et il faudra deux intervalles pour la décrire, réunis par le mot « ou ». Retiens dès maintenant cette opposition : la condition « distance petite » donne **un** intervalle, la condition « distance grande » en donne **deux**.

A. Les intervalles de $\mathbb{R}$

CE QU'IL FAUT RETENIR

Intervalles bornés. Un **intervalle** est un ensemble de réels « sans trou » : dès que deux nombres y sont, tous les nombres compris entre eux y sont aussi. Pour deux réels a et b tels que $a \leq b$:

- $[a ; b]$ est l'intervalle **fermé** : c'est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$; les deux bornes a et b **appartiennent** à l'intervalle ;
- $]a ; b[$ est l'intervalle **ouvert** : c'est l'ensemble des réels x tels que $a < x < b$; les deux bornes en sont **exclues** ;
- $[a ; b[$ et $]a ; b]$ sont les intervalles **semi-ouverts** : une borne est incluse, l'autre exclue.

Intervalles non bornés. Ce sont $[a ; +\infty[$, $]a ; +\infty[$, $] - \infty ; b]$ et $] - \infty ; b[$. Le symbole $+\infty$ se lit « plus l'infini » et $-\infty$ « moins l'infini » : ce ne sont **pas des nombres**, mais des signes qui disent que l'intervalle ne s'arrête pas de ce côté. C'est pourquoi le crochet est **toujours ouvert** du côté de l'infini.

Règle du crochet. Le crochet est **tourné vers l'intérieur** quand la borne est incluse, **vers l'extérieur** quand elle est exclue.

Cette règle du crochet mérite un instant d'attention, car c'est la source d'erreur numéro un de la leçon. Le crochet tourné vers l'intérieur ressemble à une pince qui **attrape** la borne : elle fait partie du lot. Le crochet

tourné vers l'extérieur ressemble à une pince qui **repousse** la borne : elle reste dehors. Sur la droite graduée, on traduit la première par un point plein et la seconde par un point creux. Le sens du crochet n'est donc jamais décoratif, il change l'ensemble décrit.

Les quatre formes d'intervalles sur un axe

$[2 ; 5]$ ferme



$]2 ; 5[$ ouvert



$[2 ; 5[$ semi-ouvert



$[2 ; +\infty[$ non borne



Point plein : borne incluse. Point creux : borne exclue.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Centre, rayon et amplitude d'un intervalle borné. Soit un intervalle borné de bornes a et b , avec $a \leq b$.

- Son **centre** est le milieu des deux bornes : $c = \frac{a+b}{2}$.
- Son **rayon** est la moitié de sa longueur : $r = \frac{b-a}{2}$.
- Son **amplitude** est sa longueur entière : $b - a$, c'est-à-dire le double du rayon.

On a alors $a = c - r$ et $b = c + r$: tout intervalle borné s'écrit sous la forme « centre moins rayon, centre plus rayon ».

Ces trois mots ne sont pas trois façons de dire la même chose, et il ne faut pas les confondre. Sur l'intervalle $] -3 ; 7[$, par exemple, le centre vaut $\frac{-3+7}{2} = 2$, le rayon vaut $\frac{7-(-3)}{2} = 5$ et l'amplitude vaut $7 - (-3) = 10$. Le centre dit **où** est l'intervalle, le rayon et l'amplitude disent **quelle taille** il a. On verra plus bas que le couple centre et rayon est précisément ce dont la valeur absolue a besoin.

MÉTHODE : LIRE, ÉCRIRE ET REPRÉSENTER UN INTERVALLE

Étape 1 : Traduis d'abord la condition en un **encadrement** de x , en séparant bien les inégalités strictes des inégalités larges.

Étape 2 : Ecris l'intervalle correspondant en respectant la règle du crochet : large donne un crochet fermé, strict donne un crochet ouvert.

Étape 3 : Pour la représentation, trace une droite graduée, place les bornes, puis **hachure ou surligne** la partie retenue.

Étape 4 : Marque chaque borne d'un point **plein** si elle appartient à l'intervalle, d'un point **creux** sinon.

Étape 5 : Contrôle en testant deux ou trois nombres : un nombre pris à l'intérieur doit vérifier la condition, un nombre pris juste à l'extérieur ne doit pas la vérifier.

Exemple résolu 1 : d'une condition à un intervalle

Énoncé. Ecris sous forme d'intervalle l'ensemble des réels x tels que $-2 \leq x < 4$, puis donne son centre, son rayon et son amplitude.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
L'inégalité de gauche est large, donc la borne -2 appartient à l'ensemble : crochet fermé. L'inégalité de droite est stricte, donc 4 en est exclu : crochet ouvert.	L'ensemble est l'intervalle $[-2 ; 4[$.
Le centre est le milieu des deux bornes : on additionne puis on divise par 2.	$c = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1.$
Le rayon est la demi-longueur : on soustrait la borne de gauche à celle de droite, puis on divise par 2.	$r = \frac{4 - (-2)}{2} = \frac{6}{2} = 3.$
L'amplitude est la longueur totale, donc le double du rayon.	amplitude $= 4 - (-2) = 6.$

Vérification. On contrôle avec la forme « centre moins rayon, centre plus rayon » : $c - r = 1 - 3 = -2$ et $c + r = 1 + 3 = 4$. On retrouve bien les deux bornes de départ. Attention, ce contrôle ne dit rien sur les crochets : le centre et le rayon sont les mêmes pour $[-2 ; 4[$, $[-2 ; 4]$ et $] - 2 ; 4[$.

B. Réunion et intersection d'intervalles

CE QU'IL FAUT RETENIR

Intersection. L'intersection de deux ensembles A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des nombres qui appartiennent **à la fois** à A **et** à B . Le mot-clé de l'énoncé est « et ».

Réunion. La réunion de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des nombres qui appartiennent **à A ou à B** (ou aux deux). Le mot-clé est « ou », pris au sens large.

Ensemble vide. Lorsque deux intervalles n'ont aucun nombre commun, leur intersection est l'**ensemble vide**, noté $\emptyset$.

Complémentaire. Le complémentaire d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels qui **n'appartiennent pas** à I . C'est souvent une réunion de deux intervalles.

Le « ou » des mathématiques est **inclusif** : dire qu'un nombre est dans A ou dans B n'interdit pas qu'il soit dans les deux. C'est différent du langage courant, où « tu prends le car ou la moto » signifie clairement que

tu ne feras pas les deux. Garde ce point en tête, car il explique pourquoi une réunion ne se calcule pas en additionnant des longueurs.

Pour trouver une intersection ou une réunion d'intervalles, on ne raisonne jamais de tête : **on dessine**. Les deux intervalles sont tracés l'un au-dessus de l'autre sur deux droites graduées superposées, avec les mêmes graduations. L'intersection se lit alors comme la partie couverte **deux fois**, et la réunion comme la partie couverte **au moins une fois**. Le dessin transforme un problème de logique en un problème de lecture.

Intersection et reunion se lisent sur le dessin

$$A = [-2 ; 5]$$



$$B =]1 ; 8[$$



$$A \cap B =]1 ; 5]$$



$$A \cup B = [-2 ; 8[$$



MÉTHODE : DÉTERMINER UNE RÉUNION OU UNE INTERSECTION D'INTERVALLES

Étape 1 : Trace une seule droite graduée et repère toutes les bornes qui interviennent, rangées dans l'ordre croissant.

Étape 2 : Représente le premier intervalle au-dessus de la droite, le second au-dessous, chacun avec ses points pleins ou creux.

Étape 3 : Pour l'**intersection**, garde la portion recouverte par les deux traits. Pour la **réunion**, garde la portion recouverte par au moins un des deux.

Étape 4 : Ecris le résultat, puis décide de chaque crochet **borne par borne** : une borne n'est incluse dans l'intersection que si elle est incluse dans les deux intervalles ; elle est incluse dans la réunion dès qu'elle l'est dans l'un des deux.

Étape 5 : Si aucun point n'est commun, réponds $\emptyset$ pour l'intersection. Si la réunion est en deux morceaux séparés, laisse-la sous forme de réunion : on ne peut pas l'écrire comme un seul intervalle.

Exemple résolu 2 : une intersection et une réunion

Enoncé. On donne $A = [-2 ; 5]$ et $B =]1 ; 8[$. Détermine $A \cap B$ puis $A \cup B$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On range les quatre bornes dans l'ordre croissant pour préparer le dessin.	$-2 < 1 < 5 < 8$.
Pour l'intersection, on cherche la zone couverte par les deux intervalles : elle commence là où commence le plus à droite des deux débuts, et se termine là où finit le plus à gauche des deux fins.	La zone commune va de 1 à 5.
On décide de chaque crochet. La borne 1 est exclue de B , donc exclue de l'intersection. La borne 5 appartient à A et elle est bien dans B , donc elle est gardée.	$A \cap B =]1 ; 5]$.
Pour la réunion, les deux intervalles se chevauchent : le résultat est d'un seul tenant, du début le plus à gauche à la fin la plus à droite.	La réunion va de -2 à 8.
On décide les crochets : -2 appartient à A , donc à la réunion ; 8 n'appartient ni à A ni à B , donc pas à la réunion.	$A \cup B = [-2 ; 8[$.

Vérification. On teste quelques nombres. Le nombre 1 est dans A mais pas dans B : il doit donc être dans la réunion et pas dans l'intersection, ce qui est bien le cas. Le nombre 3 est dans les deux : il doit apparaître partout, et il y est. Le nombre 8 n'est dans aucun des deux : il ne doit apparaître nulle part, et le crochet ouvert le confirme.

C. La valeur absolue

CE QU'IL FAUT RETENIR

Définition. La **valeur absolue** d'un réel x , notée $|x|$, est définie par :

- $|x| = x$ si $x \geq 0$;
- $|x| = -x$ si $x < 0$.

Autrement dit, la valeur absolue d'un nombre positif est ce nombre lui-même, et la valeur absolue d'un nombre négatif est son **opposé**. Une valeur absolue est donc **toujours positive ou nulle**, et $|x| = 0$ seulement pour $x = 0$.

Propriétés. Pour tous réels a et b :

- $|-a| = |a|$: deux nombres opposés ont la même valeur absolue ;
- $|a|^2 = a^2$, et surtout $\sqrt{a^2} = |a|$;
- $|a \times b| = |a| \times |b|$: la valeur absolue d'un produit est le produit des valeurs absolues ;
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ pour $b \neq 0$.

La ligne $|x| = -x$ trouble beaucoup d'élèves, qui y lisent un nombre négatif. Ce n'est pas le cas : elle ne s'applique que lorsque x est **déjà négatif**, et l'opposé d'un nombre négatif est positif. Fais l'essai avec $x = -3$: la règle donne $|-3| = -(-3) = 3$. Tout est cohérent, et la formule est écrite ainsi pour couvrir d'un seul coup tous les nombres négatifs, sans avoir à les traiter un par un.

L'égalité $\sqrt{a^2} = |a|$ est celle que l'on oublie le plus souvent, et pourtant elle est capitale. La racine carrée d'un nombre est par définition **positive**, alors que a peut très bien ne pas l'être. Ecrire $\sqrt{a^2} = a$ serait donc faux dès que a est négatif : par exemple $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, et non -3 . La valeur absolue est exactement ce qu'il faut pour rendre l'égalité vraie dans tous les cas.

Retiens enfin que la valeur absolue se comporte très bien avec le produit et le quotient, mais **pas** avec la somme. Il n'existe aucune formule donnant $|a + b|$ à partir de $|a|$ et $|b|$: on n'a qu'une inégalité, l'inégalité triangulaire, que l'on étudiera à la Leçon 4.

MÉTHODE : ECRIRE UNE EXPRESSION SANS LE SYMBOLE DE VALEUR ABSOLUE

- Étape 1 :** Repère les expressions placées entre les barres, et cherche pour chacune la valeur de x qui l'annule.
- Étape 2 :** Range ces valeurs dans l'**ordre croissant** : elles découpent la droite en zones, et sur chaque zone le signe de chaque expression ne change plus.
- Étape 3 :** Sur chaque zone, remplace chaque valeur absolue par l'expression elle-même si elle y est positive, par son **opposé** si elle y est négative.
- Étape 4 :** Réduis l'écriture obtenue dans chaque zone, puis présente la réponse zone par zone.
- Étape 5 :** Contrôle en choisissant un nombre dans chaque zone et en calculant l'expression des deux façons, avec et sans valeur absolue.

Exemple résolu 3 : une somme de deux valeurs absolues

Enoncé. Ecris $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$ sans le symbole de valeur absolue, en distinguant les cas.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On cherche ce qui annule chaque expression entre barres, puis on range ces valeurs dans l'ordre croissant. Elles découpent la droite en trois zones.	$x - 2 = 0$ pour $x = 2$; $x + 1 = 0$ pour $x = -1$; et $-1 < 2$.
Première zone, $x < -1$: les deux expressions sont négatives, on remplace donc chacune par son opposé.	$f(x) = -(x - 2) - (x + 1) = -2x + 1$.
Deuxième zone, $-1 \leq x < 2$: $x - 2$ est encore négatif, mais $x + 1$ est devenu positif. On ne change donc que la première.	$f(x) = -(x - 2) + (x + 1) = 3$.
Troisième zone, $x \geq 2$: les deux expressions sont positives, on enlève simplement les barres.	$f(x) = (x - 2) + (x + 1) = 2x - 1$.

Interprétation. Le résultat de la zone du milieu est remarquable : $f(x)$ y vaut 3 pour **toutes** les valeurs de x . Ce n'est pas un hasard, et la Leçon suivante en donne la lecture : $|x - 2|$ est la distance de x à 2 et $|x + 1|$ la distance de x à -1 ; pour un point situé entre -1 et 2, la somme des deux distances est toujours égale à la longueur du trajet complet, soit 3. Le calcul et le dessin disent la même chose.

D. Distance et intervalles de centre a

CE QU'IL FAUT RETENIR

Distance de deux réels. Soient A et B deux points d'une droite graduée, d'abscisses respectives a et b . La **distance** de A à B est le nombre positif :

$$d(a; b) = |b - a| = |a - b|.$$

L'ordre dans lequel on écrit les deux nombres n'a donc aucune importance, ce qui est bien normal pour une distance. En particulier, $|x|$ est la distance de x à 0.

La valeur absolue mesure une distance



L'ordre des deux nombres n'a aucune importance : la distance est la même.

valeur absolue de (b moins a) = valeur absolue de (a moins b)

Cette formule est le point de bascule de tout le chapitre. Jusqu'ici, $|x|$ était une règle de calcul un peu abstraite, avec ses deux cas. Elle devient maintenant un objet **géométrique** que l'on voit : la longueur d'un segment sur la droite graduée. Chaque fois qu'une expression avec des barres te résistera, traduis-la en distance et fais un dessin : la solution apparaît presque toujours d'elle-même.

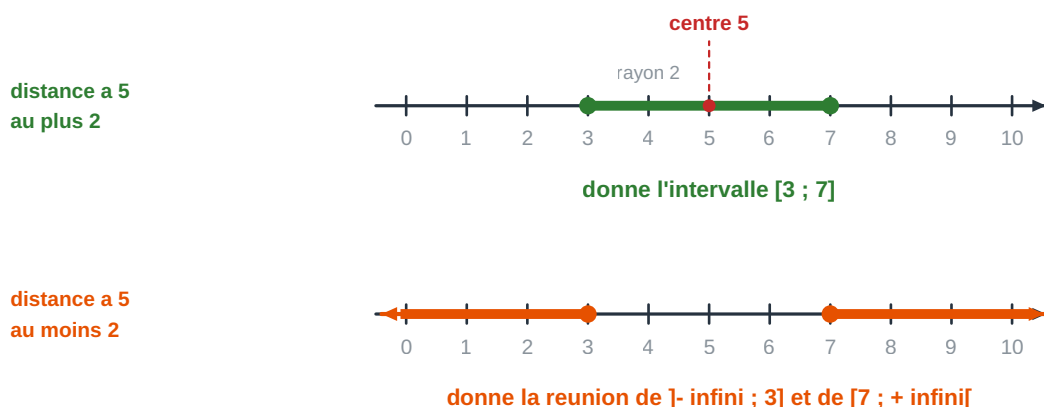
CE QU'IL FAUT RETENIR

Intervalle de centre a et de rayon r . Soient a un réel et r un réel strictement positif.

- $|x - a| < r$ signifie « la distance de x à a est plus petite que r », ce qui équivaut à $a - r < x < a + r$, c'est-à-dire à $x \in]a - r ; a + r[$.
- $|x - a| \leq r$ équivaut de même à $x \in [a - r ; a + r]$.
- $|x - a| = r$ a exactement **deux** solutions : $x = a - r$ et $x = a + r$.
- $|x - a| > r$ signifie « la distance de x à a est plus grande que r », ce qui donne une **réunion** de deux intervalles : $x \in]-\infty ; a - r[\cup]a + r ; +\infty[$.

Regarde bien la logique de cet encadré : la même expression $|x - a|$ produit trois réponses de formes très différentes selon le symbole qui la suit. Avec un $<$ ou un $\leq$, on est « près » de a et la réponse est **un seul intervalle**, celui qui entoure a . Avec un $=$, on est exactement à la distance r et il ne reste que **deux points**, un de chaque côté. Avec un $>$ ou un $\geq$, on est « loin » de a et la réponse est faite des **deux morceaux** qui restent quand on enlève l'intervalle du milieu.

Pres du centre : un intervalle. Loin du centre : deux morceaux.



Un dernier point de vocabulaire, à ne pas laisser passer. Dans l'écriture $|x - a| \leq r$, le nombre a est le **centre** et le nombre r est le **rayon** : ce sont exactement les deux nombres définis plus haut pour un intervalle. Passer d'un intervalle à une valeur absolue revient donc à calculer son centre et son rayon, et rien d'autre. Ainsi $]2 ; 12[$ a pour centre $\frac{2 + 12}{2} = 7$ et pour rayon $\frac{12 - 2}{2} = 5$: il s'écrit $|x - 7| < 5$.

MÉTHODE : TRADUIRE UNE CONDITION DE DISTANCE PAR UN INTERVALLE

Étape 1 : Ramène l'écriture à la forme $|x - a|$, en faisant apparaître une soustraction. Une écriture comme $|x + 3|$ se lit $|x - (-3)|$: le centre est -3 , et non 3 .

Étape 2 : Repère alors le **centre** a et le **rayon** r .

Étape 3 : Lis le symbole de comparaison : $<$ ou $\leq$ donne un intervalle unique de centre a ; $>$ ou $\geq$ donne une réunion de deux intervalles ; $=$ donne deux nombres.

Étape 4 : Ecris la réponse en respectant les crochets : large donne fermé, strict donne ouvert.

Étape 5 : Termine par une représentation sur la droite graduée, puis contrôle avec une valeur bien choisie.

Exemple résolu 4 : de la valeur absolue à l'intervalle

Énoncé. Ecris l'ensemble des réels x tels que $|x - 5| \leq 2$ sous forme d'intervalle, puis représente-le.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
L'écriture est déjà de la forme $ x - a $: on lit directement le centre et le rayon. La condition demande une distance au plus égale à 2.	Centre $a = 5$, rayon $r = 2$, et l'inégalité est large.
Une valeur absolue inférieure ou égale à 2 signifie que le nombre $x - 5$ est compris entre -2 et 2. On enlève ainsi les barres.	$-2 \leq x - 5 \leq 2$
On ajoute 5 aux trois membres, ce qui ne change pas le sens des inégalités.	$5 - 2 \leq x \leq 5 + 2$
On obtient un encadrement, donc un intervalle fermé puisque les deux inégalités sont larges.	$3 \leq x \leq 7$, soit $x \in [3 ; 7]$.

Vérification. Le milieu de $[3 ; 7]$ est bien $\frac{3+7}{2} = 5$, et les deux bornes sont bien à la distance 2 du centre, puisque $|3 - 5| = 2$ et $|7 - 5| = 2$. On peut aussi tester un point extérieur proche, $x = 8$: la distance vaut $|8 - 5| = 3$, qui dépasse 2, donc 8 est bien exclu.

MÉTHODE : RÉSOUDRE UNE ÉQUATION OU UNE INÉQUATION AVEC UNE VALEUR ABSOLUE

Étape 1 : Isole la valeur absolue dans un membre, de façon à obtenir $|A| = r$, $|A| \leq r$ ou $|A| \geq r$, où A est une expression du premier degré.

Étape 2 : Si le second membre est **négatif**, conclus immédiatement : une valeur absolue ne peut pas être négative, donc $|A| = -2$ n'a pas de solution, et $|A| \geq -2$ est vraie pour tout réel.

Étape 3 : Pour une **égalité** $|A| = r$ avec $r \geq 0$, écris les deux cas $A = r$ **ou** $A = -r$, puis résous chacun.

Étape 4 : Pour $|A| \leq r$, écris l'**encadrement** $-r \leq A \leq r$ et résous les deux inégalités en même temps.

Étape 5 : Pour $|A| \geq r$, écris les deux cas $A \leq -r$ **ou** $A \geq r$, et donne la réponse sous forme de réunion.

Exemple résolu 5 : une équation et une inéquation

Enoncé. Résous dans $\mathbb{R}$: 1) $|2x - 1| = 9$; 2) $|x - 2| \geq 3$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Pour la question 1, le second membre 9 est positif : l'équation a bien des solutions, et il y en a deux, obtenues en écrivant que l'expression entre barres vaut 9 ou -9.	$2x - 1 = 9$ ou $2x - 1 = -9$.
On résout chacune des deux équations du premier degré séparément.	$2x = 10$ donne $x = 5$; $2x = -8$ donne $x = -4$.
Pour la question 2, la condition est « distance à 2 supérieure ou égale à 3 » : on est loin du centre, la réponse sera une réunion.	$x - 2 \leq -3$ ou $x - 2 \geq 3$.
On ajoute 2 dans chacun des deux cas.	$x \leq -1$ ou $x \geq 5$.
On écrit la réponse en réunion de deux intervalles, avec des crochets fermés puisque les inégalités sont larges.	$S =]-\infty ; -1] \cup [5 ; +\infty[$.

Vérification. Pour la question 1, les deux solutions 5 et -4 doivent être à la distance $\frac{9}{2}$ du centre de $|2x - 1|$, c'est-à-dire de $\frac{1}{2}$: en effet $\left|5 - \frac{1}{2}\right| = \frac{9}{2}$ et $\left|-4 - \frac{1}{2}\right| = \frac{9}{2}$. Pour la question 2, on teste $x = 0$, qui appartient à la réponse : $|0 - 2| = 2$, or $2 \geq 3$ est faux, donc 0 **ne doit pas** appartenir à la solution. Effectivement 0 n'est ni dans $] - \infty ; -1]$ ni dans $[5 ; +\infty[$. Le contrôle est passé.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). a est un réel, r un réel strictement positif, et x vérifie $|x - a| > r$.

Outil (la propriété que j'utilise). La quantité $|x - a|$ est la distance du point d'abscisse x au point d'abscisse a . Sur une droite, un point est soit à gauche de a , soit à droite de a , soit confondu avec lui : il n'y a pas d'autre possibilité.

Conclusion (ce que j'en déduis). Le point x est à une distance de a plus grande que r . S'il se trouve à droite de a , sa distance vaut $x - a$, et la condition s'écrit $x - a > r$, donc $x > a + r$. S'il se trouve à gauche de a , sa distance vaut $a - x$, et la condition s'écrit $a - x > r$, donc $x < a - r$. Comme les deux positions sont les seules possibles et qu'elles s'excluent l'une l'autre, l'ensemble cherché est la réunion des deux intervalles $] -\infty ; a - r[$ et $] a + r ; +\infty[$. Il est bien en deux morceaux, séparés par l'intervalle central de tous les points **proches** de a .

Rédaction type. « On sait que $|x - a| > r$. Or un point de la droite est soit à droite, soit à gauche de a . Donc, en traitant les deux cas, $x > a + r$ ou $x < a - r$. »

Quel type de raisonnement ? C'est une **disjonction de cas** : on découpe la situation en cas qui recouvrent tout et ne se chevauchent pas, on traite chacun, puis on rassemble. C'est le même geste que celui du tableau de signes de la Leçon 1, et celui de l'exemple résolu 3 plus haut. Vérifie toujours que tes cas ne laissent aucun trou : c'est là que se cachent les erreurs.

ATTENTION !

$|x| \leq 3$ ne se résout pas « comme une équation ordinaire ».

✗ Faux : écrire « $|x| \leq 3$ donc $x \leq 3$ ». On oublie ainsi toutes les valeurs négatives, comme -2 , qui vérifient pourtant la condition puisque $|-2| = 2 \leq 3$.

✓ Vrai : $|x| \leq 3$ signifie $-3 \leq x \leq 3$, soit $x \in [-3 ; 3]$. La valeur absolue encadre des **deux côtés** de zéro, et une inéquation avec valeur absolue donne toujours **deux** conditions, jamais une seule.

ATTENTION !

Une valeur absolue n'est jamais négative, et $\sqrt{a^2}$ n'est pas toujours a .

✗ Faux : « $|x - 1| = -4$ donc $x - 1 = -4$ ». L'équation n'a **aucune** solution, puisque le membre de gauche est positif ou nul et celui de droite négatif. Inutile de calculer.

✗ Faux : « $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = 1 - \sqrt{2}$ ». Comme $\sqrt{2} > 1$, le nombre $1 - \sqrt{2}$ est négatif, alors qu'une racine carrée est positive.

✓ Vrai : $\sqrt{a^2} = |a|$, donc ici $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$. Avant d'enlever un radical sur un carré, **détermine toujours le signe** de ce qui est à l'intérieur.

À TOI DE JOUER !

Exercice 3. Ecris sous forme d'intervalle, puis représente sur une droite graduée : a) $|x - 2| < 3$; b) $|x + 1| \leq 5$.

Exercice 4. Résous dans $\mathbb{R}$: a) $|x - 4| = 6$; b) $|2x - 1| = 9$.

LECON 3 : Majorant, minorant, maximum et minimum

Activité de découverte — *Les sacs de la coopérative de Kongoussi*

A Kongoussi, une coopérative d'éleveurs pèse les sacs de fourrage avant de les charger. Ce matin, les masses relevées, en kilogrammes, sont : 38 ; 41 ; 39 ; 42 ; 40 ; 41. On note E l'ensemble de ces masses.

1. Cite trois nombres qui sont **plus grands que toutes** les masses de E . Cite aussi trois nombres plus petits que toutes ces masses.
2. Parmi tous les nombres plus grands que toutes les masses, existe-t-il **le plus petit** ? Appartient-il à E ?
3. Quelle est la **plus grande masse réellement relevée** ce matin ? Appartient-elle à E ?
4. L'acheteur écrit sur son bon : « aucun sac ne dépasse 50 kg ». A-t-il tort ? Sa phrase donne-t-elle la masse du sac le plus lourd ?

Ce que l'activité met en évidence

Les questions 1 et 3 ne demandent pas la même chose, et c'est toute la leçon. A la question 1, il y a une **infinité** de réponses possibles : 50, 100, 42,5, ou même 42 conviennent, puisque aucune masse ne les dépasse. A la question 3, il n'y a qu'**une seule** réponse : 42, parce que c'est la masse d'un sac qui a réellement été pesé. Le premier type de nombre s'appellera un **majorant**, le second un **maximum**.

La différence est de nature, pas de degré. Un majorant est un nombre qui **domine** l'ensemble, sans avoir besoin d'en faire partie : il est extérieur au problème, c'est un simple témoin qui certifie que rien ne le dépasse. Un maximum, lui, doit remplir deux conditions : dominer l'ensemble **et lui appartenir**. C'est un élément de l'ensemble, pas un observateur.

La question 4 montre pourquoi cette distinction est utile dans la vie courante et pas seulement en classe. L'acheteur ne ment pas : 50 est bien un majorant, sa phrase est vraie. Mais elle est peu informative, car elle laisse croire que les sacs pourraient peser jusqu'à 50 kg alors que le plus lourd n'en fait que 42. Un majorant garantit une **sécurité** ; un maximum donne une **information exacte**. Selon ce que l'on cherche, on a besoin de l'un ou de l'autre.

La question 2, enfin, mérite d'être relue à la fin de la leçon. Sur un ensemble fini comme celui-ci, le plus petit des majorants existe toujours et c'est justement le maximum. Mais on verra qu'un ensemble infini peut parfaitement être majoré sans posséder de maximum : la borne existe, mais elle n'est atteinte par aucun élément. C'est le point le plus délicat de la leçon, et le plus important.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un ensemble de nombres réels.

Majorant. Un réel M est un **majorant** de A lorsque **tout élément de A est inférieur ou égal à M** . On écrit : pour tout x de A , $x \leq M$. On dit alors que A est **majorée**.

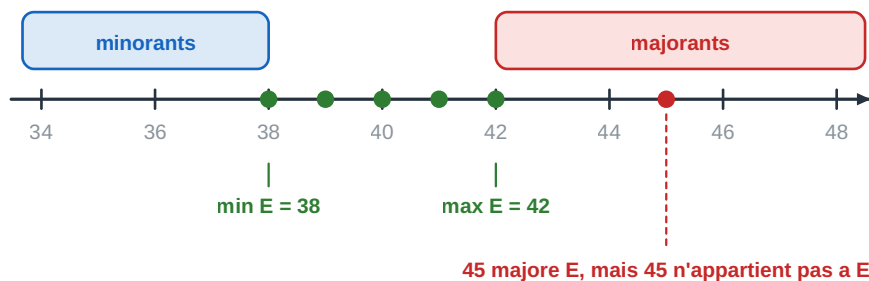
Minorant. Un réel m est un **minorant** de A lorsque tout élément de A est supérieur ou égal à m , c'est-à-dire : pour tout x de A , $x \geq m$. On dit alors que A est **minorée**.

Partie bornée. Une partie à la fois majorée et minorée est dite **bornée**.

Lis attentivement les mots « pour tout x de A ». Ils signifient qu'il suffit d'un **seul** élément dépassant M pour que M cesse d'être un majorant. Autrement dit, prouver qu'un nombre est un majorant demande de vérifier **tous** les éléments, alors que prouver qu'il ne l'est pas ne demande qu'un seul contre-exemple. Cette dissymétrie entre « pour tout » et « il existe » se retrouvera dans toutes les mathématiques du lycée.

Remarque aussi qu'une partie majorée possède **une infinité** de majorants : si M convient, alors $M + 1$, $M + 2$ et tout nombre plus grand conviennent également. Chercher « le » majorant n'a donc aucun sens. Le programme est d'ailleurs clair sur ce point : on demande de **reconnaître** un majorant ou un minorant, et surtout de ne pas le confondre avec un maximum, mais on ne cherche pas la liste de tous les majorants.

Minorants, éléments, majorants



Un majorant domine l'ensemble ; un maximum le domine ET lui appartient.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Élément maximal, ou maximum. Le **maximum** de A est un majorant de A qui **appartient à A** . On le note $\max A$.

Élément minimal, ou minimum. Le **minimum** de A est un minorant de A qui appartient à A . On le note $\min A$.

Différence essentielle. Un majorant n'a pas besoin d'appartenir à A ; un maximum, si. Une partie majorée possède une infinité de majorants, mais **au plus un** maximum, et ce maximum **peut ne pas exister**.

Pourquoi « au plus un » ? Supposons que M et M' soient deux maximums de A . Comme M est un majorant et que M' appartient à A , on a $M' \leq M$. Mais en échangeant les rôles, comme M' est aussi un majorant et que M appartient à A , on a $M \leq M'$. Les deux inégalités ensemble donnent $M = M'$. Un ensemble ne peut donc pas avoir deux maximums différents, et c'est bien pour cela qu'on se permet d'écrire « le » maximum et de lui donner une notation.

En pratique, retiens ceci : **tout ensemble fini non vide possède un maximum et un minimum**, ce sont simplement le plus grand et le plus petit de ses éléments, que l'on trouve en les rangeant. La question ne devient intéressante que pour les ensembles infinis, comme les intervalles, où le maximum peut très bien manquer.

MÉTHODE : RECONNAÎTRE UN MAJORANT, PUIS UN MAXIMUM

Étape 1 : Ecris d'abord clairement l'ensemble A . S'il est donné par une condition, comme $\{x \in \mathbb{Z} \text{ tels que } |2x - 4| \leq 10\}$, commence par résoudre cette condition et par lister ou décrire les éléments.

Étape 2 : Pour montrer que M est un **majorant** : vérifie que **chaque** élément de A est inférieur ou égal à M . Sur un ensemble fini, on compare élément par élément ; sur un intervalle, on regarde la borne de droite.

Étape 3 : Pour montrer que M est le **maximum** : vérifie d'abord que M est un majorant, **puis** que M appartient bien à A . Les deux vérifications sont indispensables, et l'oubli de la seconde est l'erreur classique.

Étape 4 : Pour le minorant et le minimum, suis exactement la même démarche en remplaçant « inférieur » par « supérieur ».

Étape 5 : Pour conclure qu'une partie est **bornée**, il faut avoir trouvé à la fois un majorant et un minorant.

Exemple résolu 1 : un ensemble fini

Enoncé. On considère $A = \{38 ; 41 ; 39 ; 42 ; 40\}$. Le nombre 45 est-il un majorant ? Le nombre 42 est-il le maximum ? Le nombre 38 est-il le minimum ?

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On range d'abord les éléments dans l'ordre croissant : c'est le geste qui rend toutes les réponses immédiates.	$38 < 39 < 40 < 41 < 42$.
Pour 45, on vérifie que chaque élément lui est inférieur ou égal. Comme le plus grand élément est 42 et que $42 \leq 45$, la condition est remplie pour tous.	Pour tout x de A, $x \leq 45$: 45 est un majorant de A.
Pour 42, on fait les deux vérifications. D'abord c'est un majorant, puisque aucun élément ne le dépasse.	Pour tout x de A, $x \leq 42$.
Ensuite on vérifie l'appartenance, qui est la condition supplémentaire exigée par la définition du maximum.	42 appartient à A, donc $\max A = 42$.
Pour 38, on procède de même avec le sens opposé : il minore et il appartient à A .	Pour tout x de A, $x \geq 38$ et 38 appartient à A, donc $\min A = 38$.

Vérification. Le nombre 45 n'appartient pas à A : c'est donc un majorant, mais certainement pas le maximum. Cet exemple montre bien que les deux notions ne se recouvrent pas. Enfin, A est **bornée**, puisqu'elle est à la fois majorée par 45 et minorée par 38.

Exemple résolu 2 : des intervalles

Enoncé. Pour chacun des ensembles $I = [-1; 3]$, $J =]-\infty; \frac{3}{2}[$ et $K = [0; +\infty[$, donne un majorant et un minorant s'ils existent, puis le maximum et le minimum s'ils existent. Lesquels sont bornés ?

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
L'intervalle I est fermé aux deux bouts : ses deux bornes lui appartiennent, elles sont donc à la fois majorant et maximum, minorant et minimum.	$\max I = 3$ et $\min I = -1$; I est bornée.
L'intervalle J n'a pas de borne à gauche : aucun nombre n'est inférieur à tous ses éléments, il n'est donc pas minoré.	J n'admet ni minorant ni minimum.
A droite, J est majoré par $\frac{3}{2}$, et aussi par 2, par 10, etc. Mais $\frac{3}{2}$ n'appartient pas à J , car le crochet est ouvert : il n'y a pas de maximum.	$\frac{3}{2}$ est un majorant de J , mais J n'a pas de maximum ; J n'est pas bornée.
L'intervalle K commence à 0, borne incluse : 0 minore et appartient à K . A droite, il ne s'arrête jamais.	$\min K = 0$; K n'admet ni majorant ni maximum, et n'est pas bornée.

Interprétation. Compare les cas de J et de K . Dans les deux, une extrémité manque, mais pas pour la même raison. Pour K , il n'y a **aucun** majorant, l'ensemble file vers l'infini. Pour J , les majorants existent en quantité, mais le plus petit d'entre eux, $\frac{3}{2}$, refuse d'appartenir à l'ensemble. « Ne pas être majoré » et « être majoré sans avoir de maximum » sont donc deux situations bien différentes.

Exemple résolu 3 : un ensemble défini par une condition

Enoncé. Soit $B = \{x \in \mathbb{Z} \text{ tels que } |2x - 4| \leq 10\}$. Ecris B en listant ses éléments, puis donne son maximum et son minimum.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On commence toujours par résoudre la condition. Une valeur absolue inférieure ou égale à 10 se traduit par un encadrement, comme à la Leçon 2.	$-10 \leq 2x - 4 \leq 10$
On ajoute 4 aux trois membres, ce qui ne change pas le sens.	$-6 \leq 2x \leq 14$
On divise les trois membres par 2, qui est strictement positif : le sens est conservé.	$-3 \leq x \leq 7$
On n'oublie pas la condition « x entier relatif » : on ne garde donc que les entiers de cet intervalle.	$B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$
B est un ensemble fini : son maximum et son minimum sont son plus grand et son plus petit élément.	$\max B = 7$ et $\min B = -3$.

Vérification. On contrôle sur les deux extrêmes : pour $x = 7$, $|2 \times 7 - 4| = |10| = 10$, la condition large est bien vérifiée. Pour $x = 8$, on aurait $|2 \times 8 - 4| = 12$, ce qui dépasse 10 : 8 est bien exclu. L'ensemble B compte 11 éléments, ce qui est cohérent avec un intervalle entier allant de -3 à 7 .

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). B est l'ensemble des réels de l'intervalle $[0 ; 1[$, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que $0 \leq x < 1$.

Outil (la propriété que j'utilise). Un maximum doit être un majorant **et** appartenir à l'ensemble. Par ailleurs, entre deux réels distincts, il existe toujours un troisième réel, par exemple leur moyenne.

Conclusion (ce que j'en déduis). Le nombre 1 est un majorant de B , puisque tout élément de B vérifie $x < 1$, donc $x \leq 1$. L'ensemble B est donc bien majoré. Mais 1 n'appartient pas à B , car le crochet de droite est ouvert : 1 ne peut pas être le maximum. Aucun autre candidat ne convient non plus. En effet, prenons un élément quelconque x de B et posons $y = \frac{x+1}{2}$, la moyenne de x et de 1. Ce nombre y est strictement compris entre x et 1, donc il appartient à B , et il est strictement plus grand que x . Aucun élément de B n'est donc supérieur ou égal à tous les autres : **B n'a pas de maximum.** En revanche 0 appartient à B et minore B , donc $\min B = 0$.

Rédaction type. « On sait que 1 majore $[0 ; 1[$ mais ne lui appartient pas. Or un maximum doit appartenir à l'ensemble. Donc 1 n'est pas le maximum, et l'on montre qu'aucun autre élément ne peut l'être. »

Quel type de raisonnement ? Deux raisonnements de nature différente se succèdent ici. Pour le minimum, on prouve une **existence** en exhibant un candidat, 0, et en vérifiant qu'il convient : un seul exemple suffit. Pour le maximum, on prouve une **non-existence**, ce qui est bien plus exigeant : il ne suffit pas de constater que quelques candidats échouent, il faut montrer qu'**aucun** ne peut convenir, et c'est le rôle de la moyenne $\frac{x+1}{2}$, qui fabrique à coup sûr un élément plus grand que celui qu'on avait choisi.

ATTENTION !

Ne confonds pas « majorant » et « maximum ».

✗ Faux : « 100 est le maximum de A car 100 est plus grand que tous les éléments de A . » Si 100 n'appartient pas à A , ce n'est qu'un **majorant**.

✗ Faux : « 100 est le maximum de $[0 ; 100[$. » Le crochet est ouvert, donc 100 n'appartient pas à l'intervalle : celui-ci n'a **pas** de maximum.

✓ Vrai : le maximum doit **appartenir** à l'ensemble. Conformément au programme, on ne cherche pas systématiquement tous les majorants d'une partie : on se contente d'en reconnaître, et de bien distinguer majorant et maximum.

À TOI DE JOUER !

Exercice 5. Soit $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x \leq 8\}$. Donne deux majorants, deux minorants, puis le maximum et le minimum de A .

Exercice 6. Soit $I =]-3 ; 7]$. Donne un majorant et un minorant de I . I admet-il un maximum ? un minimum ? Justifie.

LECON 4 : Encadrement et calcul approché

Activité de découverte — La tôle de l'atelier de Ouahigouya

Dans un atelier de tôlerie de Ouahigouya, Ousmane mesure une plaque de tôle rectangulaire. Avec son réglet, il lit une longueur $L \approx 4,5$ cm et une largeur $\ell \approx 2,3$ cm, à 0,1 cm près : l'instrument n'est pas plus précis que cela.

1. Entre quelles valeurs la vraie longueur L se trouve-t-elle ? Et la vraie largeur ℓ ? Ecris ces deux encadrements.
2. A partir de ces encadrements, entre quelles valeurs se trouve l'aire $S = L \times \ell$?
3. Aminata propose de donner « $S \approx 10,35 \text{ cm}^2$ ». Penses-tu que toutes les décimales de ce résultat sont sûres ?
4. Ousmane doit commander la peinture pour recouvrir 200 plaques identiques. Vaut-il mieux qu'il se serve de la borne basse ou de la borne haute de ton encadrement ? Pourquoi ?

Ce que l'activité met en évidence

La question 1 pose le décor : une mesure n'est jamais un nombre exact, c'est un nombre **plus une précision**. Dire « 4,5 cm à 0,1 près » ne signifie pas que la longueur vaut 4,5, mais qu'elle se trouve quelque part entre 4,4 et 4,6. Le résultat honnête d'une mesure n'est donc pas un point sur la droite graduée : c'est un **segment**, et ce segment porte un nom, l'encadrement.

La question 2 introduit la vraie nouveauté. On ne connaît ni L ni ℓ exactement, et pourtant on peut affirmer quelque chose de très précis sur leur produit. C'est le geste fondamental de l'Analyse : **calculer sur des encadrements plutôt que sur des nombres**. Comme les deux dimensions sont positives, la plus petite aire possible s'obtient en multipliant les deux bornes basses, et la plus grande en multipliant les deux bornes hautes.

La question 3 est celle qui coûte le plus de points aux élèves dans les devoirs. La valeur 10,35 n'est pas fausse, elle est **trop précise pour être honnête** : l'encadrement obtenu s'étend de 9,68 à 11,04, si bien que même le chiffre des unités n'est pas certain. Annoncer deux décimales revient à prétendre connaître le centième d'une grandeur dont on ignore l'unité. On ne garde donc, dans une valeur approchée, que les décimales **sûres**, c'est-à-dire celles qui sont communes aux deux bornes.

La question 4 montre enfin qu'un encadrement ne se lit pas de la même façon selon l'usage. Pour commander de la peinture, une pénurie coûte plus cher qu'un léger surplus : Ousmane prendra la **borne haute**, celle qui garantit qu'il en aura assez. Un vendeur qui calcule sa marge minimale prendrait au contraire la borne basse. Retiens cette idée, qui reviendra tout le chapitre : **majorer** sert à garantir qu'on ne dépassera pas, **minorer** sert à garantir qu'on aura au moins.

A. Encadrer un réel

CE QU'IL FAUT RETENIR

Encadrement. Encadrer un réel x , c'est trouver deux réels a et b tels que $a \leq x \leq b$. Le nombre a est un **minorant** de x , le nombre b en est un **majorant**.

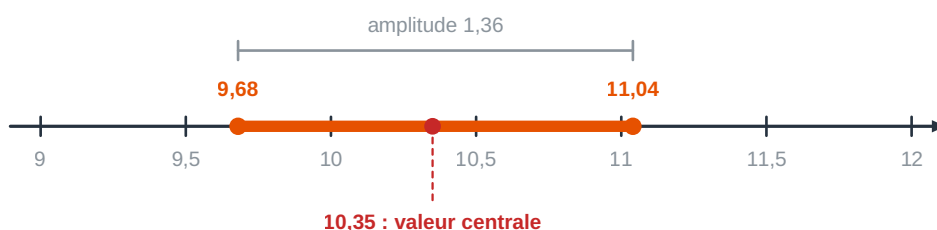
Amplitude. L'amplitude de l'encadrement est le nombre $b - a$. Plus l'amplitude est **petite**, plus l'encadrement est **précis**.

Encadrement à 10^{-n} près. Un encadrement d'amplitude 10^{-n} est dit « à 10^{-n} près ». Une mesure donnée « à p près » se traduit par l'encadrement $m - p \leq x \leq m + p$, où m est la valeur lue.

Ne confonds pas les deux nombres qui interviennent ici. La **précision de l'instrument**, 0,1 cm dans l'activité, donne un encadrement d'amplitude 0,2 cm, car on peut se tromper de 0,1 dans chaque sens. L'amplitude vaut donc **le double** de la précision annoncée. C'est une source d'erreur fréquente, et il suffit d'un dessin sur la droite graduée pour ne plus s'y tromper.

Retiens aussi qu'un encadrement est d'autant plus utile qu'il est **serré**. Ecrire $0 \leq S \leq 1000$ est parfaitement vrai pour l'aire de la plaque, mais totalement inutile. Tout l'art consiste à obtenir la plus petite amplitude possible avec les informations dont on dispose, sans jamais énoncer une borne qu'on ne pourrait pas justifier.

Un encadrement large interdit les fausses précisions



Les bornes diffèrent des unités : aucune décimale n'est sûre.

B. Encadrer une somme, un produit, un quotient

CE QU'IL FAUT RETENIR

Encadrement des opérations. Soient x et y deux réels tels que $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$.

- **Somme** : $a + c \leq x + y \leq b + d$. On additionne les bornes de même rang. Cette règle vaut pour **tous** les réels, positifs ou non.
- **Différence** : $a - d \leq x - y \leq b - c$. On soustrait « en croisant » : la borne basse de $x - y$ utilise la borne **haute** de y .
- **Produit** : si de plus $a > 0$ et $c > 0$, alors $ac \leq xy \leq bd$. On multiplie les bornes de même rang, mais **seulement pour des nombres strictement positifs**.
- **Quotient** : si de plus $a > 0$ et $c > 0$, alors $\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$. Comme pour la différence, on croise les bornes.

La règle de la somme se démontre en deux temps : de $a \leq x$ et $c \leq y$ on tire $a + c \leq x + c$ puis $x + c \leq x + y$, et l'on enchaîne. Elle ne demande aucune hypothèse de signe, parce que l'addition ne retourne jamais une inégalité. C'est la règle la plus sûre du lot.

Les trois autres demandent plus de soin. Pour la différence et le quotient, le croisement des bornes s'explique par une seule idée : $x - y$ est le plus petit possible quand x est le plus petit **et** que y est le plus grand. Retranche beaucoup à peu, tu obtiens peu. De même, $\frac{x}{y}$ est le plus petit quand le numérateur est le plus petit et le dénominateur le plus grand. Chaque fois que tu hésites, refais ce petit raisonnement en langage courant plutôt que d'apprendre la formule par coeur.

Conformément au programme, l'encadrement du produit et du quotient n'est étudié que pour des réels **strictement positifs**. Lorsqu'un facteur est négatif, on ne multiplie surtout pas les encadrements directement : on rend d'abord ce facteur positif en passant à son opposé, ce qui retourne son encadrement, on multiplie, puis on repasse à l'opposé du résultat, ce qui retourne à nouveau les inégalités. L'exemple résolu 2 détaille chaque étape.

MÉTHODE : ENCADRER UN PRODUIT DE DEUX QUANTITÉS MESURÉES

Étape 1 : Ecris l'encadrement de chaque facteur, en tenant compte de la précision annoncée : une mesure m donnée à p près se traduit par $m - p \leq x \leq m + p$.

Étape 2 : Vérifie que les deux quantités sont **strictement positives**. Si l'une ne l'est pas, applique d'abord la technique de l'opposé.

Étape 3 : Multiplie membre à membre les bornes de même rang : borne basse par borne basse pour le minorant, borne haute par borne haute pour le majorant.

Étape 4 : Calcule les deux produits sans les arrondir en cours de route, puis compare-les chiffre par chiffre.

Étape 5 : Donne enfin une valeur approchée en ne conservant que les décimales **communes aux deux bornes** : ce sont les seules dont tu es sûr.

Exemple résolu 1 : l'aire de la plaque de tôle

Enoncé. Reprends la plaque de l'atelier de Ouahigouya : $L \approx 4,5$ et $\ell \approx 2,3$, en centimètres, à 0,1 près. Encadre l'aire $S = L \times \ell$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On traduit la précision de 0,1 cm en un encadrement pour chaque dimension : on retire puis on ajoute 0,1 à la valeur lue.	$4,4 \leq L \leq 4,6$ et $2,2 \leq \ell \leq 2,4$.
Les deux dimensions sont strictement positives : on a le droit de multiplier les encadrements membre à membre.	$4,4 \times 2,2 \leq S \leq 4,6 \times 2,4$.
On effectue les deux produits, sans arrondir.	$9,68 \leq S \leq 11,04$.
On compare les deux bornes : elles diffèrent dès le chiffre des unités, 9 d'un côté et 11 de l'autre. Aucune décimale n'est donc sûre.	L'aire est comprise entre 9,7 et 11,1 cm² environ.

Vérification. La valeur « centrale » $4,5 \times 2,3 = 10,35 \text{ cm}^2$ appartient bien à l'encadrement trouvé, ce qui est rassurant. Mais l'amplitude vaut $11,04 - 9,68 = 1,36 \text{ cm}^2$: elle dépasse largement le dixième, et même l'unité. Annoncer « $S = 10,35 \text{ cm}^2$ » serait donc une **fausse précision**. La réponse honnête est : « l'aire vaut environ 10 cm², à un peu moins de 1 cm² près ».

Exemple résolu 2 : un produit dont un facteur est négatif

Énoncé. On sait que $-2 < x < -1$ et $2 < y < 3$. Encadre le produit xy .

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Le facteur x est négatif : la règle du produit ne s'applique pas. On passe à son opposé $-x$, qui est positif, en multipliant l'encadrement par -1 , ce qui retourne les inégalités.	De $-2 < x < -1$ on tire $1 < -x < 2$.
Les deux quantités $-x$ et y sont maintenant strictement positives : on peut multiplier membre à membre.	$1 \times 2 < (-x) \times y < 2 \times 3$, soit $2 < -xy < 6$.
Il reste à revenir à xy , qui est l'opposé de $-xy$. On multiplie donc par -1 , ce qui retourne une seconde fois les inégalités.	$-6 < xy < -2$.

Vérification. On teste une valeur intérieure : pour $x = -1,5$ et $y = 2,5$, le produit vaut $xy = -3,75$, et l'on a bien $-6 < -3,75 < -2$. On peut aussi contrôler le signe sans aucun calcul : un négatif multiplié par un positif donne un négatif, et les deux bornes trouvées sont effectivement négatives. Si tu avais obtenu un encadrement contenant des nombres positifs, tu aurais su immédiatement qu'il y avait une erreur.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Vérifie toi-même. a) $-3 < x < -2$ et $1 < y < 4$: encadre xy . b) $-5 < x < -4$ et $-3 < y < -2$: encadre xy (rends les **deux** facteurs positifs). (Réponses : a) $-12 < xy < -2$; b) $8 < xy < 15$.)

Exemple résolu 3 : encadrer un carré et un quotient

Énoncé. On sait que $2 < x < 3$. Encadre x^2 , puis $\frac{2}{x}$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Les deux bornes sont positives : le passage au carré conserve l'ordre, on peut donc élever les bornes au carré.	$2^2 < x^2 < 3^2$, soit $4 < x^2 < 9$.
Pour le quotient, on commence par encadrer $\frac{1}{x}$. Le passage à l'inverse sur les positifs inverse l'ordre : la borne haute de x donne la borne basse de $\frac{1}{x}$.	De $2 < x < 3$ on tire $\frac{1}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.
On multiplie ensuite les trois membres par 2, qui est strictement positif : le sens est conservé.	$\frac{2}{3} < \frac{2}{x} < 1$.

Vérification. On contrôle avec $x = 2,5$: $x^2 = 6,25$, bien compris entre 4 et 9 ; et $\frac{2}{2,5} = 0,8$, bien compris entre $\frac{2}{3} \approx 0,67$ et 1. Attention toutefois : si l'encadrement de départ avait été $-2 < x < 3$, on **n'aurait pas pu** élever les bornes au carré, car x change de signe. Il aurait fallu remarquer que x^2 vaut au minimum 0, atteint pour $x = 0$, et au maximum un peu moins que 9, d'où $0 \leq x^2 < 9$.

C. Majorer avec la valeur absolue

CE QU'IL FAUT RETENIR

Valeur absolue d'un produit et d'un quotient. Pour tous réels a et b :

$$|a \times b| = |a| \times |b| \quad \text{et} \quad \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \text{ pour } b \neq 0.$$

Inégalité triangulaire. Pour tous réels a et b :

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

L'égalité a lieu exactement lorsque a et b sont de **même signe** (ou lorsque l'un des deux est nul).

L'inégalité triangulaire porte ce nom parce qu'elle dit, en géométrie, qu'un côté d'un triangle est plus court que la somme des deux autres : le chemin direct est le plus court. Sur la droite graduée, elle exprime la même idée sous forme de trajet. Si tu avances de a puis de b , ton éloignement final au point de départ, qui vaut $|a + b|$, ne peut pas dépasser la longueur totale parcourue, qui vaut $|a| + |b|$. Il lui est même strictement inférieur dès que tu reviens en arrière, c'est-à-dire dès que a et b sont de signes contraires. C'est là que se trouve le premier vrai réflexe d'Analyse du programme : **majorer sans calculer**. Quand on ne connaît ni a ni b mais qu'on sait les majorer séparément, l'inégalité triangulaire donne aussitôt une majoration de leur somme. On ne cherche plus la valeur exacte, on cherche une borne sûre, et cette borne suffit à conclure.

JE RAISONNE

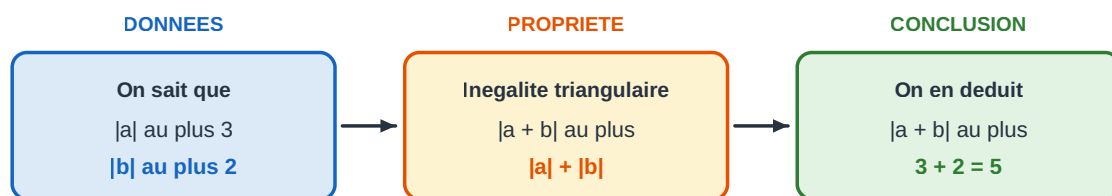
Hypothèses (ce que dit l'énoncé). a et b sont deux réels dont on ne connaît pas les valeurs. On sait seulement que $|a| \leq 3$ et $|b| \leq 2$.

Outil (la propriété que j'utilise). L'inégalité triangulaire : pour tous réels a et b , $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Conclusion (ce que j'en déduis). L'inégalité triangulaire donne d'abord $|a + b| \leq |a| + |b|$. Or $|a| \leq 3$ et $|b| \leq 2$, donc la somme $|a| + |b|$ ne dépasse pas $3 + 2 = 5$. En enchaînant les deux inégalités, on obtient $|a + b| \leq 5$, ce qui se relit ainsi : le nombre $a + b$ est à une distance d'au plus 5 de zéro, donc $-5 \leq a + b \leq 5$. Remarque bien ce que l'on vient de faire : on n'a calculé aucune valeur, on n'avait même pas le droit de le faire puisque a et b sont inconnus, et pourtant on sait **avec certitude** où se trouve leur somme.

Rédaction type. « On sait que $|a| \leq 3$ et $|b| \leq 2$. Or, pour tous réels, $|a + b| \leq |a| + |b|$. Donc $|a + b| \leq 3 + 2 = 5$. »

Déductogramme.



Déductogramme : majorer une somme sans jamais la calculer

Quel type de raisonnement ? Il s'agit d'une **majoration**, c'est-à-dire d'une déduction directe où l'on remplace une quantité inconnue par une borne sûre. C'est le geste de base de l'Analyse, et il te suivra jusqu'à la Terminale. Une majoration n'est jamais « fausse » parce qu'elle est large : $|a + b| \leq 100$ est également vrai ici. Elle est seulement plus ou moins **utile**, et l'on cherche donc toujours la plus fine que l'on sache justifier.

D. Valeur approchée, arrondi et ordre de grandeur

CE QU'IL FAUT RETENIR

Valeur approchée. Un décimal v est une **valeur approchée** du réel x à 10^{-n} près lorsque $|x - v| \leq 10^{-n}$, c'est-à-dire lorsque la distance de v à x ne dépasse pas 10^{-n} .

Troncature d'ordre n . On l'obtient en « coupant » l'écriture décimale juste après la n -ième décimale, sans rien changer d'autre.

Arrondi d'ordre n . C'est la valeur approchée décimale d'ordre n la **plus proche** de x . On regarde la décimale suivante : si elle vaut 5 ou plus, on augmente d'une unité le dernier chiffre conservé ; sinon on le laisse tel quel.

Troncature et arrondi ne coïncident pas, et l'écart entre eux se voit sur un exemple : pour 3,148, la troncature au centième vaut 3,14, alors que l'arrondi vaut 3,15, car la décimale suivante est 8. La troncature est plus rapide, mais l'arrondi est plus **juste**, car il est toujours le décimal le plus proche du nombre. C'est l'arrondi que l'on demande dans les résultats scientifiques.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Ordre de grandeur. L'ordre de grandeur d'un nombre est une valeur approchée volontairement grossière, obtenue en remplaçant chaque facteur par le nombre simple le plus proche, souvent une puissance de 10 ou un multiple simple de puissance de 10. Il ne sert pas à donner le résultat, mais à le **contrôler**.

L'ordre de grandeur est un outil de vérification, pas de calcul, et c'est son plus grand intérêt. Avant de poser une opération, on remplace 198 par 200 et 5,1 par 5, ce qui donne 1000 : si le calcul détaillé aboutit à 101 ou à 10 098, on sait immédiatement qu'une virgule ou un zéro s'est perdu en route. Un scientifique estime toujours avant de calculer, exactement comme un maçon évalue le nombre de sacs de ciment avant de commander.

L'ordre de grandeur : estimer avant de calculer

$412 \times 0,49$ vaut environ $400 \times 0,5 = 200$

$198 \times 5,1$ vaut environ $200 \times 5 = 1\,000$



Un résultat mille fois trop grand signale une erreur de puissance de 10.

MÉTHODE : DONNER UNE VALEUR APPROCHÉE FIABLE

Étape 1 : Effectue le calcul en gardant les **valeurs exactes** le plus longtemps possible : n'arrondis jamais au milieu d'un calcul, les erreurs s'y accumulent.

Étape 2 : Si les données sont des mesures, encadre le résultat au lieu de le calculer, puis compare les deux bornes obtenues.

Étape 3 : Ne conserve dans ta réponse que les chiffres **communs aux deux bornes** : ce sont les décimales sûres.

Étape 4 : Précise toujours la nature de la réponse : valeur exacte, arrondi, troncature, ou encadrement. Un résultat sans précision annoncée n'a pas de valeur scientifique.

Étape 5 : Termine par un contrôle d'**ordre de grandeur** : ton résultat est-il du bon ordre ? Une réponse mille fois trop grande signale une erreur de puissance de 10.

Exemple résolu 4 : troncature, arrondi et ordre de grandeur

Enoncé. 1) Donne la troncature et l'arrondi à 10^{-2} du nombre 7,1357. 2) Donne un ordre de grandeur de $412 \times 0,49$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Pour la troncature au centième, on coupe l'écriture juste après la deuxième décimale, sans regarder ce qui suit.	Troncature de 7,1357 à 10^{-2} : 7,13.
Pour l'arrondi, on regarde la décimale qui suit celle qu'on garde. Ici c'est 5, donc on augmente d'une unité le chiffre des centièmes.	La troisième décimale est 5, donc l'arrondi à 10^{-2} est 7,14.
Pour l'ordre de grandeur, on remplace chaque facteur par un nombre simple et proche.	$412 \approx 400$ et $0,49 \approx 0,5$.
On effectue le produit simplifié, qui se fait de tête.	$400 \times 0,5 = 200$, donc $412 \times 0,49 \approx 200$.

Vérification. Le produit exact vaut $412 \times 0,49 = 201,88$, très proche de l'estimation 200 : l'ordre de grandeur a joué son rôle. Pour la question 1, on contrôle en mesurant les distances : $|7,1357 - 7,13| = 0,0057$ et $|7,1357 - 7,14| = 0,0043$. L'arrondi est bien le plus proche des deux, ce qui est exactement sa définition.

ATTENTION !

La racine carrée d'une somme n'est pas la somme des racines, et l'arrondi n'est pas la troncature.

✗ Faux : $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Contre-exemple : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$, et $5 \neq 7$.

✗ Faux : arrondir 3,148 à 10^{-2} en « coupant » donnerait 3,14 ; mais l'**arrondi** est 3,15, car la décimale suivante, 8, est supérieure ou égale à 5. Troncature et arrondi sont deux choses différentes.

ATTENTION !

N'arrondis jamais au milieu d'un calcul, et ne multiplie pas des encadrements de nombres négatifs.

✗ Faux : arrondir chaque facteur, puis multiplier les arrondis, puis annoncer le résultat comme exact. Les erreurs se multiplient elles aussi, et l'écart final peut être énorme.

✗ Faux : de $-3 < x < -1$ et $2 < y < 4$, écrire « $-6 < xy < -4$ ». La règle du produit ne vaut que pour des nombres **strictement positifs** : il faut d'abord passer à l'opposé.

✓ Vrai : garde les valeurs exactes jusqu'au bout, arrondis **seulement à la fin**, et rends positifs tous les facteurs avant de multiplier des encadrements.

À TOI DE JOUER !

Exercice 7. On sait que $2,1 \leq x \leq 2,3$ et $5,4 \leq y \leq 5,6$ (x et y positifs). Encadre $x + y$, puis $x \times y$.

Exercice 8. Donne la troncature et l'arrondi à 10^{-2} (au centième) du nombre 7,1357. Donne aussi un ordre de grandeur de $412 \times 0,49$.

LECON 5 : Pour aller plus loin : nombres irrationnels et partie entière

Cette leçon va un peu au-delà du strict programme officiel. Elle te prépare aux exercices les plus exigeants et à la suite du lycée : sache la lire, même si elle n'est pas évaluée en priorité.

Activité de découverte — Un nombre qui n'est pas une fraction

Dans un atelier de menuiserie de Tenkodogo, Aminata trace un carré de 1 mètre de côté sur une planche, puis en mesure la diagonale. Elle sait, par le théorème de Pythagore, que cette diagonale mesure exactement $\sqrt{2}$ mètre. Elle cherche à écrire ce nombre sous la forme d'une fraction $\frac{p}{q}$, pour pouvoir donner une mesure exacte à son client.

1. Calcule $(\sqrt{2})^2$. Quelle égalité obtient-on entre p et q si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, cette fraction étant supposée irréductible ?
2. Si $p^2 = 2q^2$, le nombre p^2 est pair. Le nombre p peut-il être impair ? (Calcule le carré de quelques nombres impairs pour voir.)
3. En déduis que p et q seraient tous deux pairs. Pourquoi est-ce contradictoire avec le point de départ ?
4. Aminata mesure la diagonale au mètre ruban et lit 1,414 m. Ce nombre est-il égal à $\sqrt{2}$? Peut-il servir quand même ?

Ce que l'activité met en évidence

L'activité te fait vivre, étape par étape, un type de raisonnement entièrement nouveau. Jusqu'ici, pour démontrer, tu partais de ce qui était vrai et tu avançais. Ici, on fait exactement le contraire : on **suppose vrai ce qu'on veut réfuter**, à savoir que $\sqrt{2}$ s'écrit comme une fraction, et l'on montre que cette supposition mène à une absurdité. Ce raisonnement s'appelle le raisonnement **par l'absurde**, et il est l'un des plus puissants des mathématiques.

L'absurdité, ici, tient en une phrase. On part d'une fraction **irréductible**, c'est-à-dire dont le numérateur et le dénominateur n'ont plus aucun facteur commun, et l'on aboutit à la conclusion qu'ils sont tous les deux pairs, donc tous les deux divisibles par 2. Une fraction ne peut pas être à la fois irréductible et simplifiable : la supposition de départ était donc fausse, et $\sqrt{2}$ n'est aucune fraction.

La question 4 apporte la nuance indispensable. Le nombre 1,414 n'est pas $\sqrt{2}$, il n'en est qu'une valeur approchée, et aucun décimal ne sera jamais exactement égal à $\sqrt{2}$, si l'on en écrit mille chiffres. Cela n'empêche nullement Aminata de travailler : pour scier une planche, une valeur approchée au millimètre suffit largement. Retiens la distinction, elle est capitale : la **valeur exacte** s'écrit $\sqrt{2}$ et sert aux calculs et aux démonstrations ; la **valeur approchée** s'écrit 1,414 et sert à mesurer et à construire.

La leçon introduit enfin un second outil, la **partie entière**, qui répond à une question très proche : quand un nombre n'est pas entier, entre quels deux entiers consécutifs se place-t-il ? C'est le premier encadrement du chapitre, et le plus grossier de tous.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Rationnels et irrationnels. Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire $\frac{p}{q}$, avec p entier relatif et q entier naturel non nul ; leur ensemble se note $\mathbb{Q}$. Un réel qui **n'est pas** rationnel est dit **irrationnel** : c'est le cas de $\sqrt{2}$, de $\sqrt{3}$ et de π .

Irrationalité de $\sqrt{2}$. Le nombre $\sqrt{2}$ est **irrationnel** : aucune fraction n'a pour carré 2.

Les irrationnels « comblent les trous » laissés par les rationnels sur la droite réelle.

Prends garde à ne pas confondre « irrationnel » et « avec une virgule ». Le nombre 0,25 a une virgule et il est pourtant parfaitement rationnel, puisque $0,25 = \frac{1}{4}$. Ce qui décide, ce n'est pas l'apparence de l'écriture, c'est la **possibilité** d'écrire le nombre en fraction. Une règle pratique existe d'ailleurs : un nombre est rationnel si et seulement si son écriture décimale s'arrête ou devient périodique, comme $\frac{1}{3} = 0,333\dots$. Un irrationnel, lui, a une écriture décimale infinie sans aucune période.

Retiens aussi que la même démonstration s'adapte à d'autres racines : elle marche pour $\sqrt{3}$ en remplaçant partout « pair » par « divisible par 3 », et plus généralement pour $\sqrt{n}$ dès que n n'est pas un carré parfait. En revanche elle ne s'applique pas à $\sqrt{9}$, et pour cause : $\sqrt{9} = 3$ est un entier.

MÉTHODE : DÉMONTRER QU'UN NOMBRE EST IRRATIONNEL PAR L'ABSURDE

Étape 1 : Suppose le contraire de ce que tu veux montrer : le nombre s'écrit $\frac{p}{q}$, fraction **irréductible**, avec q non nul.

Étape 2 : Elève au carré pour faire disparaître le radical, et arrange l'égalité pour la débarrasser des dénominateurs.

Étape 3 : Déduis-en une propriété de **divisibilité** sur p : par exemple, si p^2 est pair, alors p est pair, car le carré d'un impair est toujours impair.

Étape 4 : Remplace p par son écriture ($p = 2k$ par exemple), simplifie, et obtiens la **même** propriété de divisibilité pour q .

Étape 5 : Conclut : p et q ont un facteur commun, ce qui contredit l'irréductibilité supposée. L'hypothèse de départ est donc fausse, et le nombre est **irrationnel**.

Exemple résolu 1 : $\sqrt{2}$ est irrationnel

Enoncé. Démontre que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On suppose le contraire de ce qu'on veut prouver, en prenant bien soin de choisir la fraction irréductible : c'est elle qui fournira la contradiction.	Supposons $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, fraction irréductible.
On élève au carré les deux membres, puis on multiplie par q^2 pour supprimer le dénominateur.	$2 = \frac{p^2}{q^2}$, donc $p^2 = 2q^2$.
Le nombre $2q^2$ est le double d'un entier : il est pair. Donc p^2 est pair, donc p est pair, car le carré d'un nombre impair est impair.	p est pair, on peut donc écrire $p = 2k$ avec k entier.
On remplace p par $2k$ dans l'égalité, puis on simplifie par 2.	$4k^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2k^2$: q^2 est pair, donc q est pair.
p et q sont tous deux pairs, donc divisibles par 2 : la fraction n'était pas irréductible, contrairement à ce qu'on avait supposé.	Contradiction : $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Vérification. On peut illustrer le résultat en encadrant $\sqrt{2}$ de plus en plus finement sans jamais l'atteindre : $1,41^2 = 1,9881$ est un peu trop petit et $1,42^2 = 2,0164$ un peu trop grand, donc $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$. On peut recommencer avec trois décimales, puis quatre, indéfiniment : aucun décimal ne tombe jamais juste, ce qui est cohérent avec la démonstration.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Partie entière. La **partie entière** d'un réel x , notée $E(x)$, est le **plus grand entier inférieur ou égal à x** . Elle est caractérisée par le double encadrement :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1,$$

et l'on a donc $0 \leq x - E(x) < 1$. Le nombre $x - E(x)$ s'appelle la **partie décimale** de x .

Sur la droite graduée, la partie entière se lit sans aucun calcul : c'est la graduation entière située **immédiatement à gauche** de x , celle qu'on rencontre en reculant depuis x . Pour $3,7$, on recule et l'on tombe sur 3. Pour $-3,2$, on recule et l'on tombe sur -4 , et non sur -3 qui est à droite. C'est précisément là que se trompent presque tous les élèves : sur les nombres négatifs, la partie entière n'est pas obtenue en « enlevant la virgule ».

Remarque enfin que la partie décimale $x - E(x)$ est toujours positive ou nulle, et strictement inférieure à 1, y compris pour les nombres négatifs. Pour $x = -4,3$, on obtient $E(x) = -5$ et la partie décimale vaut $-4,3 - (-5) = 0,7$. Le double encadrement de l'encadré est le contrôle qui permet de ne jamais se tromper.

MÉTHODE : DÉTERMINER LA PARTIE ENTIÈRE $E(x)$

Étape 1 : Place le nombre x entre **deux entiers consécutifs** : cherche n tel que $n \leq x < n + 1$.

Étape 2 : La partie entière est l'entier **de gauche** : $E(x) = n$.

Étape 3 : Pour un nombre **négatif** non entier, prends l'entier situé juste **en dessous** de x , c'est-à-dire à sa gauche sur la droite graduée.

Étape 4 : Si x est lui-même un entier, alors $E(x) = x$.

Étape 5 : Pour un nombre écrit avec un radical, encadre-le d'abord entre deux carrés parfaits : de $4 < 7 < 9$ on tire $2 < \sqrt{7} < 3$, donc $E(\sqrt{7}) = 2$.

Exemple résolu 2 : trois parties entières

Enoncé. Détermine $E(3,7)$, $E(-3,2)$ et $E(\sqrt{2})$.

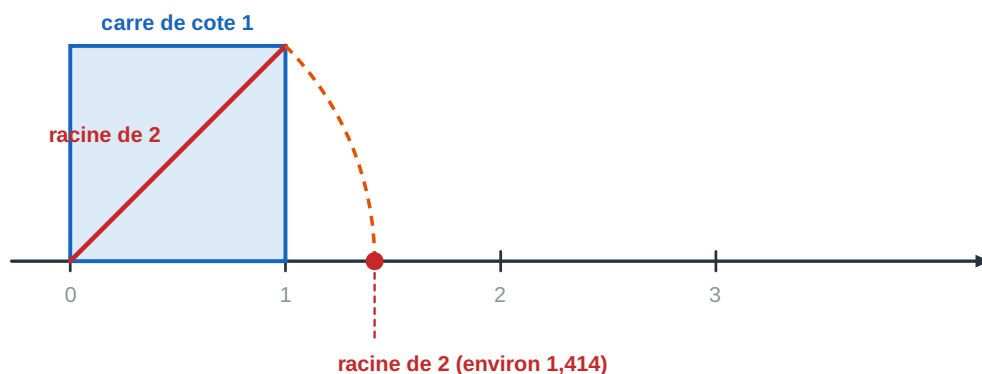
Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Le nombre $3,7$ est situé entre les entiers 3 et 4 . On garde celui de gauche.	$3 \leq 3,7 < 4$, donc $E(3,7) = 3$.
Le nombre $-3,2$ est situé entre -4 et -3 . L'entier de gauche est -4 , car sur la droite graduée -4 est à gauche de -3 .	$-4 \leq -3,2 < -3$, donc $E(-3,2) = -4$.
Pour $\sqrt{2}$, on encadre entre deux carrés parfaits consécutifs : 1 et 4 .	$1 < 2 < 4$ donne $1 < \sqrt{2} < 2$, donc $E(\sqrt{2}) = 1$.

Vérification. Dans chaque cas, on contrôle avec la caractérisation $E(x) \leq x < E(x) + 1$: on a bien $3 \leq 3,7 < 4$, puis $-4 \leq -3,2 < -3$, puis $1 \leq \sqrt{2} < 2$. Ce contrôle prend trois secondes et évite l'erreur de signe.

Pour aller plus loin : $\sqrt{2}$ et les fractions sur la droite réelle

La droite réelle. A chaque point de la droite graduée correspond **un seul** nombre réel, et réciproquement : c'est une correspondance parfaite entre $\mathbb{R}$ et la droite. Les rationnels, à eux seuls, ne « remplissent » pas la droite ; ce sont les **irrationnels** qui en comblent les trous.

Construire la racine de 2 à la règle et au compas



Un irrationnel est un vrai point de la droite, même s'il n'est aucune fraction.

Construire $\sqrt{2}$ à la règle et au compas. Au-dessus du segment $[0 ; 1]$ de la droite graduée, trace un carré de côté 1 . Sa diagonale mesure $\sqrt{2}$, d'après le théorème de Pythagore, puisque $1^2 + 1^2 = 2$. En reportant cette diagonale au compas à partir de l'origine, tu obtiens un point dont l'abscisse est **exactement** $\sqrt{2}$. Un irrationnel est donc un véritable point de la droite, aussi concret que n'importe quel autre, même s'il n'est aucune fraction.

Construire une fraction avec Thalès. Toute fraction $\frac{p}{q}$ se place elle aussi exactement : on partage le segment $[0 ; 1]$ en q parts égales grâce au **théorème de Thalès**, puis on en reporte p . Rationnels et irrationnels cohabitent ainsi, point par point, sur la même droite, et aucun dessin ne permet de les distinguer à l'oeil. C'est bien la démonstration, et elle seule, qui décide de la nature d'un nombre.

ATTENTION !

$E(-3,2) = -4$ et non -3 ; et « à virgule » ne veut pas dire irrationnel.

✗ Faux : « $E(-3,2) = -3$ », obtenu en supprimant simplement la partie décimale. Cela reviendrait à choisir l'entier de **droite**, ce qui contredit la définition.

✗ Faux : « $0,25$ est irrationnel car il a une virgule ».

✓ Vrai : $E(x)$ est le plus grand entier **inférieur ou égal** à x , donc $E(-3,2) = -4$. Et $0,25 = \frac{1}{4}$ est **rationnel** : ce qui compte, c'est de pouvoir l'écrire en fraction, pas son apparence.

À TOI DE JOUER !

Exercice 9. Détermine la partie entière de : a) $5,8$; b) $-2,3$; c) 7 ; d) $\sqrt{7}$ (on sait que $2 < \sqrt{7} < 3$).

Exercice 10. En t'inspirant de la démonstration du cours, montre que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

LECON 6 : Pour aller plus loin : identités de degré 3 et triangle de Pascal

Cette leçon prolonge les identités remarquables vues en 3ème. Proposée en extension, elle te servira pour factoriser les polynômes (Ch. 2) et te prépare aux développements de $(a + b)^n$.

Activité de découverte — Les coefficients cachés

- Développe $(a + b)^2$. Quels sont les coefficients des termes a^2 , ab et b^2 ?
- Ecris $(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$, puis développe étape par étape. Range le résultat suivant les puissances décroissantes de a .
- Quels sont les quatre coefficients obtenus ? Compare-les à la ligne correspondante du tableau ci-dessous.

Développement	Coefficients
$(a + b)^0$	1
$(a + b)^1$	1 · 1
$(a + b)^2$	1 · 2 · 1
$(a + b)^3$	1 · 3 · 3 · 1
$(a + b)^4$	1 · 4 · 6 · 4 · 1

Question 4. Observe le tableau : comment chaque nombre s'obtient-il à partir de la ligne du dessus ? Devine la ligne suivante, puis vérifie avec $4 + 6 = 10$.

Ce que l'activité met en évidence

La question 2 est un simple calcul, mais elle apprend un geste utile : pour élever au cube, on ne se lance pas dans un triple produit, on **réutilise** le carré déjà connu. C'est une stratégie générale en algèbre, celle qui consiste à s'appuyer sur le résultat précédent plutôt que de tout recommencer.

Le tableau de la question 3 révèle ensuite une régularité que le calcul seul ne montrait pas. Les coefficients ne sont pas quelconques : chaque ligne commence et finit par 1, elle est symétrique, et surtout chaque nombre intérieur est la **somme des deux nombres placés juste au-dessus de lui**. Le 3 de la troisième ligne, par exemple, vaut $1 + 2$. Cette règle de construction est bien plus facile à retenir que la liste des coefficients, et elle permet d'aller aussi loin qu'on veut.

La question 4 te fait accomplir un geste de mathématicien : tu **observes** une régularité sur quelques cas, tu **conjectures** qu'elle continue, puis tu **vérifies** . Attention cependant : vérifier n'est pas démontrer. Le tableau confirme la conjecture sur les premières lignes, mais la démonstration complète de la règle relève d'un cours plus avancé, celui de la formule du binôme, que tu rencontreras plus tard. Retiens simplement que la conjecture est ici juste, et qu'elle porte un nom : le **triangle de Pascal** .

CE QU'IL FAUT RETENIR

Identités remarquables de degré 3. Pour tous réels a et b :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

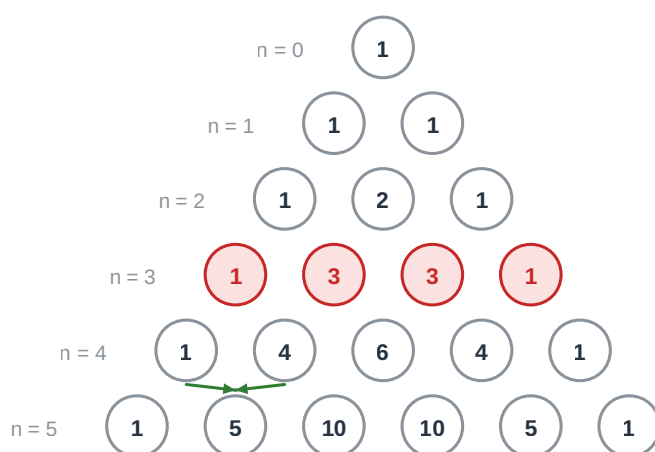
Observe la structure des deux premières formules : les puissances de a **décroissent** de 3 à 0 pendant que celles de b **croissent** de 0 à 3, la somme des deux exposants valant toujours 3. Les coefficients 1, 3, 3, 1 sont ceux de la ligne 3 du triangle. Pour $(a - b)^3$, on garde exactement les mêmes coefficients et l'on fait simplement **alterner les signes** +, −, +, −.

Les deux dernières formules, celles de la somme et de la différence de deux cubes, se retiennent par une phrase : le premier facteur est $a - b$ ou $a + b$ selon le signe de départ, et le second facteur est fait du carré du premier terme, du produit des deux termes affecté du **signe contraire** , et du carré du second terme. Le meilleur moyen de ne jamais se tromper reste de **vérifier en développant** : dans le produit, tous les termes du milieu se simplifient deux à deux, et il ne reste que les deux cubes.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Triangle de Pascal. On range les coefficients des développements de $(a + b)^n$ en triangle. Chaque ligne commence et finit par 1, et **chaque autre nombre est la somme des deux nombres situés juste au-dessus de lui** . La ligne numéro n donne les coefficients du développement de $(a + b)^n$. Pour $(a - b)^n$, on conserve les mêmes coefficients en alternant les signes.

Le triangle de Pascal



1 + 4 = 5 : chaque nombre est la somme des deux nombres du dessus

La ligne n donne les coefficients du développement de $(a + b)$ puissance n.

Le triangle est un outil de calcul, pas seulement une curiosité. Si l'on te demande $(a + b)^4$, tu n'as pas besoin de multiplier quatre parenthèses : tu écris la ligne 4, soit 1, 4, 6, 4, 1, puis tu fais décroître les puissances de a et croître celles de b . Tu obtiens directement $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$. Le gain de temps devient considérable dès que l'exposant grandit.

MÉTHODE : DÉVELOPPER AVEC LE TRIANGLE DE PASCAL, FACTORISER $a^3 \pm b^3$

Étape 1 : Pour développer $(a + b)^3$: écris les coefficients de la ligne 3 du triangle, soit 1, 3, 3, 1 ; fais **décroître** les puissances de a de 3 à 0 et **croître** celles de b de 0 à 3. Si c'est $(a - b)^3$, alterne les signes.

Étape 2 : Attention aux termes composés : dans $(2x - 1)^3$, le rôle de a est tenu par $2x$, donc $a^3 = (2x)^3 = 8x^3$, et non $2x^3$. Mets systématiquement des parenthèses.

Étape 3 : Pour factoriser $a^3 - b^3$ ou $a^3 + b^3$: repère d'abord les deux cubes, écris le premier facteur ($a - b$ ou $a + b$), puis le second, formé du carré du premier terme, du produit des deux termes avec le signe opposé à celui du premier facteur, et du carré du second terme.

Étape 4 : Vérifie toujours en développant le produit obtenu : c'est le contrôle le plus rapide et il ne trompe jamais.

Exemple résolu 1 : développer et factoriser

Enoncé. 1) Développe $(x + 2)^3$. 2) Factorise $x^3 - 8$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On applique la formule avec $a = x$ et $b = 2$, coefficients 1, 3, 3, 1.	$(x + 2)^3 = x^3 + 3x^2 \times 2 + 3x \times 4 + 8$
On calcule chaque terme séparément, sans en oublier aucun.	$(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$
On reconnaît une différence de deux cubes : 8 est le cube de 2.	$x^3 - 8 = x^3 - 2^3$
On factorise avec $a = x$ et $b = 2$: le produit $+2x$ est de signe opposé.	$x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

Vérification. On développe le produit obtenu :

$(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8 = x^3 - 8$. Les termes en x^2 se détruisent, les termes en x aussi, et il ne reste que les deux cubes : c'est bien la signature de cette identité.

Exemple résolu 2 : un terme composé

Enoncé. 1) Développe $(2x - 1)^3$. 2) Factorise $8x^3 + 1$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On identifie $a = 2x$ et $b = 1$. Les parenthèses autour de $2x$ sont indispensables.	$(2x - 1)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 + 3(2x) - 1$
On calcule chaque terme, les signes alternant puisqu'il s'agit d'une différence.	$(2x - 1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
On remarque que $8x^3$ est le cube de $2x$: c'est une somme de deux cubes.	$8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3$
On applique la formule de la somme de deux cubes.	$8x^3 + 1 = (2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

Vérification. On contrôle par une valeur numérique bien choisie, ce qui est plus rapide qu'un développement complet. Pour $x = 1$: d'un côté $8 \times 1 + 1 = 9$, de l'autre $(2 + 1)(4 - 2 + 1) = 3 \times 3 = 9$. Les deux résultats coïncident. Ce contrôle ne remplace pas une démonstration, mais il détecte à coup sûr une erreur de signe ou de coefficient.

ATTENTION !

$(a + b)^3$ n'est pas $a^3 + b^3$!

✗ Faux : $(x + 2)^3 = x^3 + 8$. C'est la même erreur qu'au collège avec $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$, et elle est tout aussi grave.

✗ Faux : $(2x)^3 = 2x^3$. L'exposant s'applique à **tout** le facteur, donc $(2x)^3 = 8x^3$.

✓ Vrai : $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. N'oublie jamais les deux termes du milieu, $3a^2b$ et $3ab^2$.

Pour t'en convaincre, essaie avec $x = 1$: le vrai résultat est 27, alors que $x^3 + 8$ donnerait 9.

À TOI DE JOUER !

Exercice 11. a) Développe $(x + 1)^3$, puis $(2x - 1)^3$. b) A l'aide du triangle de Pascal, développe $(a + b)^4$.

Exercice 12. Factorise : a) $x^3 - 27$; b) $8x^3 + 1$ (remarque : $8x^3 = (2x)^3$).

AUTO-EVALUATION : Test de fin de chapitre

Réponds de tête ou au brouillon, en quelques secondes par question. Barème indicatif : 1 point par question. Corrigés en fin de chapitre.

1. A quels ensembles parmi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ appartient le nombre -7 ? Et le nombre $\sqrt{3}$?
2. Range dans l'ordre croissant : -2 ; $\frac{3}{2}$; $-\frac{5}{3}$; 0 ; 1 .
3. Compare $\frac{9}{7}$ et $\frac{13}{10}$ par la différence.
4. Pour $0 < x < 1$, range $x, x^2, \sqrt{x}$ et $\frac{1}{x}$ dans l'ordre croissant.

5. Calcule $|-9|$, $|4 - 11|$ et la distance entre -3 et 5 .
6. Ecris sous forme d'intervalle : a) $-2 \leq x < 4$; b) $x > 5$.
7. Résous $|x - 3| = 5$.
8. Ecris l'ensemble des réels x tels que $|x - 1| \leq 4$ sous forme d'intervalle.
9. Soit $A = \{1 ; 4 ; 7 ; 9\}$. Donne un majorant, le maximum et le minimum de A .
10. Vrai ou faux : « 10 est le maximum de l'intervalle $[2 ; 10[$ ». Justifie.
11. On a $3,2 \leq x \leq 3,4$ et $1,5 \leq y \leq 1,7$ (positifs). Encadre $x + y$ et $x \times y$.
12. Donne l'arrondi et la troncature à 10^{-2} de $5,2718$.
13. On sait que $|a| \leq 4$ et $|b| \leq 3$. Majore $|a + b|$.
14. Donne l'écriture scientifique de $0,00072$ et un ordre de grandeur de $297 \times 4,1$.
15. Développe $(x + 1)^3$, puis factorise $x^3 - 1$.
16. Cite les cinq ensembles de nombres dans l'ordre d'emboîtement.
17. Détermine $[-2 ; 5] \cap]1 ; 8[$, puis $[-2 ; 5] \cup]1 ; 8[$.
18. Donne le centre, le rayon et l'amplitude de l'intervalle $] -3 ; 7[$.
19. Rends rationnel le dénominateur de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
20. Résous $|x - 2| \geq 3$ et donne la réponse sous forme de réunion d'intervalles.

JE M'EXERCE

Exercices classés par leçon, de difficulté croissante. Corrigés des exercices impairs en fin de chapitre.

Leçon 1 : Ordre, comparaison et calcul dans $\mathbb{R}$

Exercice 13. Recopie et complète avec $\in$ ou $\notin$: a) $5 \dots \mathbb{N}$; b) $-7 \dots \mathbb{N}$; c) $\frac{3}{4} \dots \mathbb{Z}$; d) $\sqrt{5} \dots \mathbb{Q}$; e) $\sqrt{5} \dots \mathbb{R}$; f) $-\frac{2}{4} \dots \mathbb{Z}$.

Exercice 14. Range dans l'ordre croissant : -3 ; 0 ; $-\frac{1}{2}$; 2 ; $-\frac{5}{4}$; $\frac{3}{2}$.

Exercice 15. Compare par la différence : a) $\frac{5}{3}$ et $\frac{8}{5}$; b) $\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{11}$; c) $\frac{9}{4}$ et $\frac{11}{5}$.

Exercice 16. Compare par la différence : a) $\frac{7}{4}$ et $\frac{12}{7}$; b) $\frac{9}{7}$ et $\frac{13}{10}$; c) $\frac{8}{5}$ et $\frac{13}{8}$.

Exercice 17. Deux enfants se disputent un gâteau : l'un veut les $\frac{3}{5}$, l'autre les $\frac{5}{7}$ du gâteau. Est-ce possible ? Justifie.

Exercice 18. Range dans l'ordre croissant, sans calculatrice : $\sqrt{2}$; $1,5$; $\frac{7}{5}$; $\sqrt{3}$.

Exercice 19. Pour chacun des cas, indique si $x^2 < x$ ou $x^2 > x$: a) $x = 0,3$; b) $x = 1$; c) $x = 4$; d) $x = \frac{5}{2}$.

Exercice 20. Calcule et donne le résultat sous forme de fraction irréductible : $A = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \div \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3}\right)$.

Exercice 21. Calcule et donne le résultat sous forme de fraction irréductible :
 $B = \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{3} + \frac{5}{4}\right) \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}\right)$.

Exercice 22. Calcule et donne le résultat sous forme de fraction irréductible :
 $C = \left(1 + \frac{2}{3}\right) \div \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{2}{5}\right)\right] + \frac{7}{8}$.

Exercice 23. Ecris sous la forme d'une seule puissance :
a) $2^3 \times 2^5$; b) $(10^4 \times 10^2) \div 10^3$; c) $(3^2)^3$; d) $5^{-2} \times 5^4$.

Exercice 24. Ecris le nombre A sous la forme $2^a \times 3^b \times 5^c$: $A = (2^{10} \times 3^7 \times 5^4) \div 30^8$.

Exercice 25. Ecris en notation scientifique : a) 0,0000000103 ; b) cinq millions de milliards ; c) douze milliardièmes.

Exercice 26. Donne l'écriture scientifique de : a) $(3 \times 10^4) \times (2 \times 10^{-7})$; b) $(6 \times 10^5) \div (2 \times 10^2)$.

Exercice 27. Ecris plus simplement (sortir le plus grand carré parfait) :

a) $\sqrt{18}$; b) $\sqrt{48}$; c) $\sqrt{75}$; d) $\sqrt{16 \times 9}$.

Exercice 28. Ecris sous la forme $a\sqrt{b}$ (a entier, b sans carré) : $\sqrt{32} + \sqrt{98} - 5\sqrt{72}$.

Exercice 29. Rends rationnel le dénominateur : a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; b) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; c) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$.

Exercice 30. Etudie le signe de chacune des expressions : a) $(5 - 3x)(2x + 1)$; b) $(1 - 2x)(1 - 3x)$.

Exercice 31. Etudie le signe de : a) $\frac{x+1}{x-2}$; b) $\frac{x^2-4}{x+2}$.

Exercice 32. Etudie le signe de : a) $2x(x - 2)$; b) $(2x - 1)\frac{3x-1}{x}$.

Exercice 33. Démontre que, pour tout réel x , $x^2 - x(x + 3) = -3x$. En déduis le signe de $x^2 - x(x + 3)$ selon les valeurs de x .

Exercice 34. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Compare $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$. Que devient le résultat si a et b sont tous deux strictement négatifs ?

Leçon 2 : Intervalles, valeur absolue et distance

Exercice 35. Représente graphiquement, puis écris sous forme d'intervalle l'ensemble des réels vérifiant :

a) $-3 \leq x \leq 2$; b) $x \geq 7$; c) $x > \frac{7}{2}$; d) $-1 \leq x < 1$; e) $-2 < x \leq 2$.

Exercice 36. Ecris sous forme d'intervalle les ensembles : $A = \{x \in \mathbb{R} / -7 \leq x \leq 11\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / 9 \leq x < 15\}$; $C = \{x \in \mathbb{R} / -7 < x \leq 12 \text{ et } 8 \leq x \leq 19\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} / -3 < x \leq 12 \text{ et } -5 \leq x \leq 7\}$.

Exercice 37. Calcule : a) $|15|$; b) $|-25|$; c) $|0|$; d) $|-12 + 5|$; e) $|3 - 8| - |8 - 3|$.

Exercice 38. Sur une route, Ouagadougou est au kilomètre 0 et Ziniaré au kilomètre 30. a) Quelle est la distance entre les deux villes ? b) Si tu es au kilomètre 18, à quelle distance es-tu de chacune ?

Exercice 39. Schématise les intervalles suivants : $[1 ; 4[$; $[-2 ; +\infty[$; $[-7 ; 7]$; $] -\infty ; 1[$; $[0 ; 1]$. Existe-t-il un réel commun à ces cinq intervalles ?

Exercice 40. Détermine le centre, le rayon et l'amplitude de chacun des intervalles :

$A =] -3 ; 7[$; $B =]11 ; 16[$; $C = [-\frac{5}{4} ; \frac{1}{2}]$; $D = [-\frac{3}{2} ; 5]$.

Exercice 41. Résous dans $\mathbb{R}$: a) $|x + 3| = 4$; b) $|x - 4| = \frac{21}{5}$; c) $|x + 2| < 3$.

Exercice 42. Résous dans $\mathbb{R}$: a) $|x - 6| \leq 3$; b) $|2x + 1| < 4$; c) $|x - 1| \geq 9$; d) $|x - 5| \geq 2$.

Exercice 43. Résous dans $\mathbb{R}$: a) $3 \leq |3x + 2| < 5$; b) $|-2x + 7| \leq 2$; c) $|-x + 1| \geq 4$.

Exercice 44. Détermine l'intersection ou la réunion :

a) $[0 ; 7[\cap] -\infty ; 1]$; b) $] -5 ; 10] \cup] -\infty ; -4[$; c) $] -1 ; 0[\cap [-2 ; 0]$; d) $[0 ; 2] \cap [1 ; 5[$; e) $] -\infty ; 4] \cup]3 ; +\infty[$; f) $] -2 ; 4] \cup [-5 ; 8]$.

Exercice 45. Ecris à l'aide d'une valeur absolue :

a) $x \in [-3 ; 7]$; b) $x \in] -\infty ; -4] \cup [2 ; +\infty[$; c) $x \in]2 ; 12[$.

Exercice 46. Soit (Δ) une droite graduée ; A et B ont pour abscisses 2 et -3 . Détermine l'ensemble des points M d'abscisse x tels que : a) $d(A, M) = d(B, M)$; b) $d(A, M) \leq 3$; c) $d(B, M) > 4$.

Exercice 47. Soit M un point d'abscisse x ; A a pour abscisse 3 et B pour abscisse $-\frac{3}{2}$. a) Exprime, en fonction de x , les distances MA et MB . b) Détermine les x tels que $MA \leq 3$, puis $MB \leq \frac{7}{2}$, puis les deux à la fois.

Exercice 48. Combien y a-t-il d'entiers relatifs x tels que $|x| \leq 6$? Lesquels ?

Exercice 49. Combien y a-t-il d'entiers relatifs x tels que $3 - x \leq 2x + 4 \leq 5 - x$?

Exercice 50. Résous le système : $|x - 1| < 2$ et $|2 - x| \leq 2$.

Exercice 51. Résous le système : $|x - 1| < \frac{5}{4}$ et $|x - \frac{1}{5}| \leq \frac{1}{20}$.

Exercice 52. Résous dans $\mathbb{R}$: a) $2 < |x + 1| < 3$; b) $|x - 3| > 2$ et $|x + 4| \leq 3$.

Exercice 53. Traduis chaque condition par une valeur absolue, puis par un intervalle : a) « x est à moins de 5 de 8 » ; b) « x est à au plus 0,1 de 1 ».

Exercice 54. Vrai ou faux, en justifiant : a) $|x| = 3a$ deux solutions ; b) $|x| = -2a$ une solution ; c) $|x - 2| = |2 - x|$ pour tout x .

Leçon 3 : Majorant, minorant, maximum, minimum

Exercice 55. Soit $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x \leq 8\}$. a) Donne trois majorants et trois minorants de A . b) Donne le maximum et le minimum de A .

Exercice 56. Soit $E = \{1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{5} ; \frac{1}{6}\}$. a) Trouve un majorant de E qui soit un élément de E . b) Trouve un minorant de E qui ne soit pas un élément de E .

Exercice 57. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}$: $I = [-1 ; \sqrt{3}]$; $J =]-\infty ; \frac{3}{2}[$; $K = [0 ; +\infty[$. Pour chacun, donne (s'ils existent) deux majorants, deux minorants, le maximum et le minimum. Lesquels sont bornés ?

Exercice 58. Soit $B = \{x \in \mathbb{Z} / |2x - 4| \leq 10\}$. a) Ecris B en extension (liste de ses éléments). b) Donne le maximum et le minimum de B .

Exercice 59. Soit $L = \{-7,4 ; -\sqrt{5} ; 0 ; \pi ; \frac{19}{7}\}$. a) Donne deux majorants et deux minorants de L . b) Donne le maximum et le minimum de L . L est-il borné ?

Exercice 60. Vrai ou faux, en justifiant : a) « Tout intervalle fermé borné $[a ; b]$ admet un maximum et un minimum. » b) « L'intervalle $]0 ; 1[$ admet un minimum. » c) « 100 est le maximum de $[0 ; 100[$. »

Exercice 61. Soit $A = \{x \in \mathbb{N} / 2 \leq x \leq 8\}$ et $B = \{x \in \mathbb{Z} / |2x - 4| \leq 10\}$. Trouve quatre majorants et quatre minorants de A , puis de B .

Exercice 62. On considère l'ensemble A des réels de la forme $\frac{m}{m+2}$ avec $m \in \mathbb{N}$. a) Calcule les premiers termes ($m = 0, 1, 2, 3$). b) Montre que 0 est le minimum de A . c) Montre que A est majoré par 1, mais n'admet pas de maximum.

Leçon 4 : Encadrement et calcul approché

Exercice 63. On sait que $2,1 \leq x \leq 2,3$ et $5,4 \leq y \leq 5,6$ (x, y positifs). Encadre $x + y, x - y, x \times y$ et $\frac{x}{y}$.

Exercice 64. Une plaque rectangulaire mesure $L \approx 4,5$ cm et $\ell \approx 2,3$ cm, à 0,01 cm près. a) Encadre L , puis ℓ . b) Dédus-en un encadrement de l'aire S . c) Donne une valeur approchée de S avec les décimales sûres.

Exercice 65. L'aire d'un rectangle est comprise entre $84m^2$ et $96m^2$. Sa largeur est comprise entre 6 m et 8 m. Détermine un encadrement de la longueur, puis du périmètre.

- Exercice 66.** Soit x un réel tel que $|2x - 1| < 3$. a) Encadre $2x - 1$, puis x . b) Déduis-en un encadrement de $x + 3$.
- Exercice 67.** Une balle est lâchée d'une hauteur h . A chaque rebond, elle remonte aux $\frac{3}{4}$ de la hauteur précédente. a) Exprime, en fonction de h , la hauteur atteinte aux 1^{er}, 2^e et 3^e rebonds. b) Pour $h = 5\text{ m}$, donne ces hauteurs arrondies au centimètre.
- Exercice 68.** Donne la troncature et l'arrondi à 10^{-2} et à 10^{-3} des nombres : a) 7,1357 ; b) 3,14159.
- Exercice 69.** Soient a et b deux réels tels que $|a| \leq 5$ et $|b| \leq 2$. Majore $|a + b|$, $|a - b|$ et $|a \times b|$ à l'aide des propriétés de la valeur absolue.
- Exercice 70.** Si $-2 < x < 3$, encadre x^2 (attention au passage au carré : étudie selon le signe de x).
- Exercice 71.** Soient x et y deux réels tels que $|2x - 1| < 3$ et $|y + 2| < 1$. Encadre $x - y$, puis $|x + 3| - |y|$.
- Exercice 72.** Donne, sans calculatrice, un ordre de grandeur de :
a) $198 \times 5,1$; b) $412 \times 0,49$; c) $6020 \div 29$.
- Exercice 73.** Donne l'arrondi à 10^{-2} de : a) $\pi \approx 3,14159$; b) $\sqrt{2} \approx 1,41421$; c) $\frac{2}{3}$.
- Exercice 74.** Le rayon d'un disque vérifie $4,9 \leq r \leq 5,1$ (en cm). En prenant $\pi \approx 3,14$, encadre le périmètre $P = 2\pi r$, puis l'aire $\mathcal{A} = \pi r^2$.
- Exercice 75.** Vérifie l'inégalité triangulaire $|a + b| \leq |a| + |b|$ pour : a) $a = 3$ et $b = -5$; b) $a = -7$ et $b = 2$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?
- Exercice 76.** Soient x et y deux réels tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$. a) Démontre que $|xy| < 1$. b) Déduis-en que $1 + xy > 0$.

J'APPROFONDIS

Exercices combinant plusieurs leçons. Corrigés d'une sélection en fin de chapitre.

Exercice 77 (Maths et vie quotidienne (Léo)). A Léo, un producteur achète des noix d'anacarde entre 12 000 et 15 000 FCFA le sac. Il les revend avec une marge comprise entre 20 % et 30 %. Détermine l'intervalle des prix de vente possibles d'un sac.

Exercice 78 (Maths et vie quotidienne (Bagré)). A Bagré, une parcelle rizicole rectangulaire a une largeur comprise entre 18 m et 20 m et une longueur comprise entre 45 m et 48 m. Encadre son aire, puis son périmètre.

Exercice 79 (Maths et vie quotidienne (Dori)). A Dori, on partage une récolte de fourrage de 390 kg entre trois éleveurs proportionnellement à leurs effectifs de zébus : 6, 9 et 11 têtes. Calcule la part de chacun et vérifie que la somme fait bien 390 kg.

Exercice 80 (Maths et vie quotidienne (Ouagadougou)). Au marché de Rood-Woko, le sac de mil coûte entre 12 000 et 15 000 FCFA. Une revendeuse en achète 4 sacs. a) Encadre la dépense totale. b) Elle dispose de 60 000 FCFA : est-elle sûre de pouvoir payer ? Justifie.

Exercice 81 (Maths et vie quotidienne (Banfora)). A la sucrerie de Banfora, un sachet de sucre est conforme si sa masse s'écarte de moins de 4 g de 500 g. a) Ecris cette condition avec une valeur absolue, puis sous forme d'intervalle. b) Parmi les masses 503 g, 495 g, 504 g et 497 g, lesquelles sont conformes ?

Exercice 82 (Maths et vie quotidienne (Orodara)). A Orodara, un verger produit des mangues vendues entre 250 et 300 FCFA le kilogramme. Un grossiste en achète une quantité comprise entre 80 et 90 kg. Encadre la somme qu'il devra payer.

Exercice 83. On donne $A = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ et $B = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ (admis positifs). a) Calcule $A \times B$. b) On pose $X = A + B$. Calcule X^2 . c) Déduis-en la valeur de X, puis une écriture simplifiée de A et B.

Exercice 84. 1) Développe $(2 + \sqrt{5})^2$ et $(2 - \sqrt{5})^2$. 2) Déduis-en une écriture simplifiée de $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} - \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$.

Exercice 85. Démontre les égalités :

a) $\sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{14}$; b) $\sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$. (On rappelle que $\sqrt{u^2} = |u|$.)

Exercice 86. Ecris sous la forme $a + b\sqrt{c}$ (a, b rationnels, c entier naturel) :

$$A = (4 + 3\sqrt{2})^2 - (2 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1).$$

Exercice 87. Calcule et donne le résultat sous forme de fraction irréductible :

$$L = (1 + \frac{2}{3}) \div [(1 - \frac{1}{2})(1 + \frac{2}{5})] + \frac{7}{8}.$$

Exercice 88. (a) et (b) étant des réels strictement positifs, simplifie en écrivant sous la forme

$$a^m b^n : (a^3 b^2)^3 \times a^2 b^{-4} \div [(a^2 b)^3 \times ab].$$

Exercice 89. Les dénominateurs étant non nuls, écris plus simplement : $M = \frac{2}{a+1} + (1 - \frac{1}{a}) \div (1 + \frac{1}{a})$.

Exercice 90. Soient x et y deux réels tels que $|x| < 1$ et $|y| < 1$. 1) Développe $(1 - x)(1 - y)$ et $(1 + x)(1 + y)$. 2) Démontre que $\frac{x+y}{1+xy}$ a une valeur absolue inférieure à 1.

Exercice 91 (J'écris et j'explique). Choisis trois chiffres distincts non nuls ; note s leur somme. Forme les six nombres obtenus en permutant ces trois chiffres, et note S leur somme. a) Calcule $S \div s$. b)

Recommence avec trois autres chiffres : que remarques-tu ? c) Énonce ta conjecture et tente de l'expliquer.

Exercice 92 (J'écris et j'explique). Ton camarade écrit : « comme $-5 < 2$, alors $(-5)^2 < 2^2$, donc $25 < 4$ ». Repère l'erreur, explique-la en une ou deux phrases, et énonce correctement la règle du passage au carré dans une inégalité.

Exercice 93 (J'écris et j'explique). Rédige, en quelques lignes, la **différence entre un majorant et un maximum** d'une partie de $\mathbb{R}$, en donnant un exemple d'ensemble qui est majoré mais qui n'a pas de maximum.

Approfondissements et démonstrations

Exercice 94. Ecris sans le symbole de valeur absolue, après avoir déterminé le signe de l'expression :

$$a) |3 - \sqrt{2}|; b) |\sqrt{7} - 3|; c) |2 - \sqrt{5}|; d) |\sqrt{5} - \sqrt{3}|.$$

Exercice 95. Soit x un réel. Ecris l'expression $|x - 2| + |x + 1|$ sans valeur absolue, en distinguant les trois cas : $x < -1$; $-1 \leq x < 2$; $x \geq 2$.

Exercice 96. Rends rationnel le dénominateur : a) $\frac{1}{\sqrt{3}-1}$; b) $\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$; c) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

Exercice 97. Soit x un réel positif. a) Démontre que $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$. b) Déduis-en une valeur approchée de $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ pour $x = 8 \times 10^{-6}$.

Exercice 98 (J'écris et j'explique). Soient a et b deux réels. a) En appliquant l'inégalité triangulaire à $u = a - b$ et $v = b$, démontre que $|a| - |b| \leq |a - b|$. b) De même, démontre que $|b| - |a| \leq |a - b|$.

Exercice 99. Soit x un réel positif. a) Démontre que $\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x} + 1}$. b) Dédus-en que $0 \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq x$. c) Donne une valeur approchée de $\sqrt{1,0004}$ ($x = 4 \times 10^{-4}$) et indique la précision obtenue.

Exercice 100. Recopie et complète avec $\in$ ou $\notin$, en justifiant : a) $0,25 \dots \mathbb{Q}$; b) $\sqrt{9} \dots \mathbb{Q}$; c) $1 + \sqrt{2} \dots \mathbb{Q}$; d) $2\sqrt{3} - \sqrt{12} \dots \mathbb{Q}$.

Exercice 101. Dans $\mathbb{R}$, détermine le complémentaire de chacun des intervalles (sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles) : a) $[2; 5]$; b) $] -\infty ; 3[$; c) $[-1 ; +\infty[$.

Exercice 102. On sait que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$ et $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$. a) Encadre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, puis $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$. b) Sachant que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$, déduis-en un encadrement de $\sqrt{6}$.

Exercice 103. Démontre que, pour tous réels a et b , $|a + b| \geq |a| - |b|$. Interprète ce résultat sur la droite graduée.

Exercice 104 (Maths et vie quotidienne (Kaya)). A Kaya, un artisan du cuir découpe des lanières de longueur $\ell \approx 27,4$ cm à 0,2 cm près. Il en met 8 bout à bout. a) Encadre la longueur d'une lanière, puis celle des 8 lanières. b) Une bande de cuir de 2,20 m suffit-elle à coup sûr ? Justifie.

Exercices supplémentaires

Exercice 105. Compare sans calculatrice, par la différence : a) $-\frac{15}{7}$ et $-\frac{13}{6}$; b) $-\frac{5}{4}$ et $-\frac{7}{5}$; c) $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{3}{4}$.

Exercice 106. Compare en passant aux carrés (attention aux signes) : a) -3 et $-\pi$; b) $-\sqrt{5}$ et -2 ; c) $\sqrt{7}$ et $\frac{8}{3}$.

Exercice 107. Compare en passant aux inverses : a) $\frac{1}{-3}$ et $\frac{1}{-5}$; b) $-\frac{2}{7}$ et $-\frac{3}{10}$.

Exercice 108. Range dans l'ordre croissant : $-\sqrt{3}$; $-1,7$; $-\frac{5}{3}$; $-1,8$.

Exercice 109. On donne $-1,5 < x < -1,4$ et $2 < y < 3$. Encadre : a) $x + y$; b) $x - y$; c) xy ; d) $\frac{x}{y}$.

Exercice 110. Soit $A(x) = 2x^2 - 5$. Sachant que $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, encadre $A(\sqrt{2})$.

Exercice 111. Soit $B(x) = \frac{3}{x} - 1$. Sachant que $2 \leq x \leq 5$, encadre $B(x)$.

Exercice 112 (Moyennes). Soient a et b deux réels strictement positifs. On pose la moyenne arithmétique $M = \frac{a+b}{2}$ et la moyenne géométrique $g = \sqrt{ab}$. a) Calcule M et g pour $a = 2$ et $b = 8$. b) Démontre que $M - g = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$, puis que $M \geq g$.

Exercice 113. Démontre que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 114. Le nombre $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est-il rationnel ? (On pourra élever au carré et utiliser l'irrationalité de $\sqrt{6}$.)

Exercice 115. Détermine la partie entière de : a) $\frac{12}{5}$; b) $-\frac{7}{2}$; c) $\sqrt{10}$; d) $-\sqrt{10}$.

Exercice 116. Soit x un réel. a) Rappelle pourquoi $0 \leq x - E(x) < 1$. b) Calcule $x - E(x)$ pour $x = 4,3$ puis pour $x = -4,3$.

Exercice 117. a et b sont deux réels. Démontre que $|a| - |b| \leq |a - b|$ (on appliquera l'inégalité triangulaire à $a = (a - b) + b$).

Exercice 118. Résous dans $\mathbb{R}$: a) $|2x - 1| = 5$; b) $|x + 3| \leq 2$; c) $|x - 4| > 1$.

Exercice 119. Ecris $f(x) = |x - 1| - |x + 2|$ sans valeur absolue, en distinguant les trois cas :
 $x < -2$; $-2 \leq x < 1$; $x \geq 1$.

Exercice 120. Sachant que $2,236 < \sqrt{5} < 2,237$ et $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$: a) encadre $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; b) encadre $\frac{2\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{2}$; c) lequel des deux est le plus grand ?

Exercice 121 (Maths et vie quotidienne). Un lingot a la forme d'un pavé de dimensions a, b, c (en cm) avec $3,15 \leq a \leq 3,16$; $5,6 \leq b \leq 5,7$; $3,3 \leq c \leq 3,4$. a) Encadre son volume $V = abc$. b) Donne la partie entière de chacune des deux bornes obtenues.

Exercice 122 (Maths et vie quotidienne (Dori)). A Dori, la température d'une journée varie entre -3°C (à l'aube) et $+5^\circ\text{C}$ (l'après-midi). a) Ecris cet encadrement. b) Quel est l'écart entre la plus haute et la plus basse température ? c) Traduis « la température T s'écarte de moins de 4°C de 1°C » par une inégalité avec une valeur absolue.

Exercice 123 (J'écris et j'explique). Explique pourquoi, pour deux nombres **négatifs**, « le plus grand en valeur absolue est le plus petit ». Illustre par un exemple sur la droite graduée.

Exercice 124. Rends rationnel le dénominateur et simplifie : a) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; b) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Exercice 125. Ecris le plus simplement possible : a) $\sqrt{18}$; b) $\sqrt{72}$; c) $\sqrt{125}$; d) $\sqrt{625}$; e) $\sqrt{192}$; f) $\sqrt{2592}$; g) $\sqrt{80} + \sqrt{20} - 5\sqrt{45}$; h) $\sqrt{32} + \sqrt{50} - 16\sqrt{18}$; i) $3\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{75}$; j) $\sqrt{28} - 3\sqrt{63} + 5\sqrt{175}$; k) $\sqrt{\frac{4}{3}} \times \sqrt{\frac{27}{32}}$; l) $\sqrt{\frac{125}{2}} \times \sqrt{\frac{32}{5}}$; m) $\sqrt{\frac{36}{3}} \times \sqrt{\frac{3}{18}} \times \sqrt{\frac{2}{27}}$; n) $\sqrt{(2 - \sqrt{2})^2}$; o) $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$; p) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$; q) $\sqrt{11 - 4\sqrt{7}}$; r) $\sqrt{(1 + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}$; s) $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$; t) $\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$; u) $\sqrt{\frac{\sqrt{11}+3}{\sqrt{11}-3}}$; v) $\sqrt{33 + \sqrt{4 + \sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}}}$.

Exercice 126. Ecris sans radical au dénominateur : a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$; c) $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; d) $\frac{1-2\sqrt{2}}{1+2\sqrt{2}}$; e) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; f) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

Exercice 127. Ecris sous la forme $a + b\sqrt{n}$ (a et b rationnels, n entier naturel) : a) $\frac{1}{\sqrt{7}-1}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

Exercice 128 (Maths et vie quotidienne). La vitesse de la lumière est de 300 000 km/s. On appelle année-lumière la distance parcourue par la lumière en 365 jours. Donne la notation scientifique d'une année-lumière, en mètres.

Exercice 129. On admet que le rayon du Soleil est 696 000 km et celui de la Terre 6 400 km. a) Détermine le volume du Soleil, puis celui de la Terre, à l'aide de $V = \left(\frac{4}{3}\right)\pi R^3$; donne chaque résultat en notation scientifique. b) Détermine le réel k tel que $V_{\text{Soleil}} = k \times V_{\text{Terre}}$ (on prendra $\pi = \frac{22}{7}$).

Exercice 130 (Maths et vie quotidienne). Dans un lycée du Burkina Faso, le haricot est servi à la cantine deux fois par semaine ; la cantine a fonctionné 27 semaines et la ration est de 150 g par élève. a) Sachant que 2 000 élèves sont servis à chaque repas de haricot, calcule en grammes la quantité de haricot préparée durant l'année ; donne le résultat en notation scientifique. b) Avec 24,3 tonnes de haricot, combien d'élèves pouvait-on servir deux fois par semaine pendant les 27 semaines ?

Exercice 131. Calcule : a) 5^1 ; b) 2^{-5} ; c) $(-1)^{12}$; d) $(-1)^{15}$.

Exercice 132. Ecris sous la forme $2^m \times 3^n$ (m et n entiers relatifs) : a) 27^2 ; b) $(3^3)^2 \times 2^4$; c) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$; d) $\frac{81 \times 2^2}{2^3 \times 3^{-4}}$.

Exercice 133. Donne la notation scientifique de : a) $167,15 \times 10^{-15}$; b) la distance Terre–Soleil, égale à 150 millions de km, exprimée en mètres.

Exercice 134. Factorise chacune des expressions suivantes : a) $f(x) = (2x - 1)^2 - (x + 3)^2$; b) $g(x) = 4x^2 + 12x + 9 - (2x + 3)(x + 1) + (x + 2)^2$; c) $h(x) = x^3 - 36x - (x + 6)(x^2 - x)$; d) $k(x) = 81 - (2x + 1)^2$; e) $l(x) = 2x^2 - 8x + 8 - (x^2 - 2x)$.

Exercice 135. Le réel x vérifie $2 < x < 3$. Donne un encadrement de : a) x^2 ; b) $\frac{2}{x}$; c) $\frac{x-1}{x+5}$.

Exercice 136 (Maths et vie quotidienne). Un terrain rectangulaire a une longueur L comprise entre 29,5 m et 30,5 m, et une largeur ℓ comprise entre 24,8 m et 25,3 m. Donne un encadrement de son périmètre, puis de son aire.

Exercice 137. Montre que, pour tout x de l'intervalle $[2 ; 3]$, on a $0 \leq x^2 - 3x + 5 \leq 8$.

Exercice 138 (Maths et vie quotidienne). Monsieur Badini veut clôturer avec du grillage sa parcelle rectangulaire, dont la longueur est comprise entre 40 m et 40,25 m et la largeur entre 25 m et 25,5 m. Entre quelles valeurs se situe la longueur de grillage nécessaire (le périmètre de la parcelle) ?

Exercice 139. Détermine l'ensemble des réels x tels que :

a) $|2x - 5| = 2x - 5$; b) $|x - 2| \neq x - 2$; c) $3x - 7 < |3x - 7|$; d) $|x| \leq x$.

Exercice 140. Ecris sans le symbole de valeur absolue :

a) $f(x) = |2x + 4| - |x - 3|$; b) $f(x) = |x| + |x - 1| - |2x|$; c) $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$.

Exercice 141. Ecris chaque intervalle à l'aide d'une distance (valeur absolue) :

a) $E =] - 3 ; 5[$; b) $F =] - 10 ; -2[$.

Exercice 142. 1. Ecris sous forme d'intervalle (ou de réunion d'intervalles) : a) $\{x \text{ tels que } d(x ; 3) < 5\}$; b) $\{x \text{ tels que } d(x ; -1) \leq 7\}$; c) $\{x \text{ tels que } d(x ; 2) > 6\}$. 2. Représente chacun sur une droite graduée.

Exercice 143. Sur une droite graduée, A et B ont pour abscisses -1 et 5 . a) Calcule $d(A ; B)$. b) Trouve l'abscisse x du point M tel que : (i) $d(A ; M) + d(B ; M) = 8$; (ii) $d(A ; M) = 3d(B ; M)$.

Exercice 144 (Maths et vie quotidienne). A l'entrée d'un tunnel, il est écrit « Hauteur maximale : 4 m ». Un camion mesure 2,50 m de haut. a) Si h est la hauteur des bagages que l'on peut ajouter sur le camion, donne un encadrement de h . b) Ecris l'ensemble des valeurs possibles de h sous forme d'intervalle.

Exercice 145. Résous dans $\mathbb{R}$: a) $x^2 = 5$; b) $x^2 = -3$.

Exercice 146. Ecris sans radical au dénominateur : a) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; b) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$.

Exercice 147. Calcule et donne le résultat sous forme de fraction irréductible : a) $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$; b) $B = \frac{2}{3} - 4 + \frac{1}{5}$; c) $C = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} - \frac{1}{3}$; d) $D = \frac{1}{5} + (\frac{1}{3} + \frac{4}{5}) - \frac{5}{15} + \frac{33}{165}$; e) $E = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{2}{3}) - \frac{1}{8}$.

Exercice 148. Calcule : a) $A = \frac{1+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{4}} + \frac{1-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{3}}$; b) $B = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{3}}$; c) $C = \frac{50}{7} \times \frac{9}{40} \times \frac{15}{7}$; d) $D = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{15}{8}}{\frac{11}{7} \times \frac{8}{45}}$.

Exercice 149. Calcule : a) $A = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$; b) $B = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}$.

Exercice 150. Calcule : a) $A = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{48} + \frac{1}{96}) \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{48} - \frac{1}{96})$; b) $B = (2 - \frac{11}{4} + \frac{7}{8} + \frac{1}{4}) \times (1 + \frac{7}{8} + \frac{11}{4} - \frac{5}{12})$.

Exercice 151. Calcule : a) $A = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}} : \frac{\frac{1}{6}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}$; b) $B = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}} : \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}}$.

Exercice 152. Calcule : a) $A = \frac{7+\frac{1}{4}}{5} + \frac{5}{\frac{7}{3}+\frac{1}{4}} - \frac{31}{60}$; b) $B = \frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}} + \frac{1+\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{2}}$.

Exercice 153. Calcule : a) $A = (\frac{1+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{3}}) \times (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \times (\frac{2}{3} - \frac{1}{4})$; b) $B = (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) \times (\frac{1}{2} + \frac{1}{6}) \times (\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}})$.

Exercice 154. Développe puis réduis : a) $A = (a\sqrt{2} + b)^2 + (a - b\sqrt{2})^2$; b) $B = (\frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2})^2$; c) $C = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} - 1)$; d) $D = (x^2 + x)^2$; e) $E = (x^2 - x)^2$.

Exercice 155. Montre que, pour tout réel x , $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Exercice 156. Ecris sous la forme $2^p \times 3^q$ (p et q entiers relatifs) : a) $A = \frac{4^2 \times 9^3}{64}$; b) $B = \frac{6^3 \times 36}{2^5 \times 3^2}$; c) $C = \frac{(3^2)^3 \times 2^5}{32 \times 3^4}$; d) $D = \frac{128}{(2^5)^4 \times 9}$; e) $E = \frac{(2^5)^3 \times 3^2}{2^{-4} \times 3^7}$; f) $F = \frac{(2^{-3})^2 \times (3^5)^3}{2^7}$; g) $G = \frac{(6^3)^5 \times 36^2}{64^3}$; h) $H = \frac{(4^2)^3 \times (8^3)^2}{81^3}$; i) $I = \frac{(3^{-5})^{-3} \times (4^2)^{-3}}{(\frac{3}{2})^5}$; j) $J = \frac{(\frac{2}{3})^7}{(2^5)^3 \times (3^4)^{-2}}$.

Exercice 157. Ecris sous la forme $a^n \times b^p \times c^q$ (a, b, c réels non nuls ; n, p, q entiers relatifs) : a) $A = \frac{(abc)^2}{(\frac{a}{b})^{-5} \times (\frac{b}{c})^3}$; b) $B = \frac{(\frac{a}{b})^{-3}}{(abc)^5}$; c) $C = (\frac{a}{bc})^2 \times (\frac{b}{ac})^2 \times (\frac{c}{ab})^2$; d) $D = \frac{(a^2)^3 b^7 c^3}{(\frac{a}{b})^2 \times (\frac{c}{a})^{-3}}$; e) $E = (\frac{a}{bc})^1 \times (\frac{b}{ac})^2 \times (\frac{c}{ab})^3 : \frac{a^{-1} b^2 c^{-3}}{(abc)^{-3}}$.

Exercice 158. Ecris sous forme de fraction irréductible : a) $A = \frac{4}{3^2 \times 2^2 \times 6^{-1}}$; b) $B = \frac{3^2 \times 4^2 \times 5^3 \times 0,36}{7 \times 6^2 \times 12^2}$; c) $C = \frac{5 \times (1,225)^2 \times 10^6}{(14)^4}$; d) $D = \frac{14 \times 3^6}{(3^2)^2 \times 3 \times 2^3 \times 7}$; e) $E = \frac{11^3 \times 6^4}{2^4 \times 3^4 \times 11^2 \times 13}$.

SITUATIONS D'INTÉGRATION

Compétence visée : résoudre, dans des situations de commerce, de production agricole et d'atelier, des problèmes de comparaison, d'encadrement et de contrôle d'un résultat annoncé, en mobilisant les nombres réels, les intervalles et la valeur absolue.

Ressources mobilisées : comparer deux réels et contrôler un ordre de grandeur ; traduire une condition de distance par une valeur absolue puis par un intervalle ; reconnaître un majorant, un minorant, un maximum et un minimum ; encadrer une somme, un produit et un quotient de réels strictement positifs ; donner une valeur approchée fiable et repérer une fausse précision.

Moment d'évaluation : à la fin du chapitre, une fois les six leçons traitées. Corrigés-types et grille de correction en fin de chapitre.

Situation d'intégration 1 : Le rendement annoncé. A Dédougou, l'usine d'égrenage a reçu 4 200 tonnes de coton graine, récoltées sur 4 000 hectares. En réunion de bilan, le délégué annonce un rendement de 10,5 tonnes à l'hectare et parle d'un record régional. L'usine emploie 180 saisonniers et le transport d'une tonne jusqu'à l'usine revient à 6 000 FCFA. Le directeur hésite à faire imprimer cette phrase sur l'affiche de fin de campagne. Dis-lui ce qu'il doit en faire et sur quel chiffre il peut s'appuyer devant les producteurs.

Situation d'intégration 2 : Les six planches du menuisier. Boureima, menuisier à Ouagadougou, doit tailler six planches identiques dans une seule barre de bois de 11,05 m. Il mesure le modèle au mètre ruban et lit 1,84 m, à 1 cm près, car son ruban n'est pas plus précis. La colle de son atelier sèche en deux heures et quatre apprentis travaillent avec lui. Il a promis au client que la barre suffirait. Dis-lui s'il peut tenir cette promesse à coup sûr, et ce qu'il doit répondre au client.

Situation d'intégration 3 : Les sachets de la sucrerie. Téné surveille l'ensachage à la sucrerie de Banfora. La machine est réglée sur 500 g et le client n'accepte un sachet que si sa masse s'écarte d'au plus

5 g de ce réglage. Ce matin, Téné pèse cinq sachets : 503 g, 497 g, 506 g, 499 g et 494 g. La cantine de l'usine ouvre à midi et chaque carton d'expédition contient 24 sachets. Le chef de chaîne doit décider s'il arrête la machine pour la régler. Tranche la question à sa place.

Situation d'intégration 4 : Le bon de pesée. La coopérative de Léo a fait peser ses sacs de noix d'anacarde : 48 kg, 51 kg, 49 kg, 52 kg, 50 kg et 49 kg. L'acheteur n'emporte un lot que si aucun sac ne dépasse 53 kg ; sur le bon, il écrit « lot accepté, sac le plus lourd : 53 kg ». La pesée a duré une heure et la coopérative compte 32 membres. Soungalo veut savoir s'il peut signer ce bon tel quel. Conseille-le.

Situation d'intégration 5 : Les semences de la parcelle. Le comité de gestion du périmètre de Bagré prépare la campagne de Fatimata. Sa parcelle est rectangulaire : la largeur est comprise entre 24 m et 25 m, la longueur entre 60 m et 62 m. Un sac de semences couvre 50 m^2 et coûte 4 000 FCFA. La parcelle se trouve à 3 km du barrage et la campagne dure quatre mois. Le comité a réservé 130 000 FCFA pour les semences et veut savoir si cette somme le met à l'abri d'un manque. Réponds-lui.

Situation d'intégration 6 : Les forages de la piste. Dans la commune de Dori, les points d'eau sont repérés le long d'une piste rectiligne par leur position en kilomètres à partir du centre : le forage A au kilomètre 3, le forage B au kilomètre 11 et le puits pastoral P au kilomètre 6. Le service de l'hydraulique n'équipe cette année que les forages situés à moins de 4 km de P. La piste mesure 18 km et un troupeau de zébus s'y abreuve deux fois par jour. Le chef de service doit désigner les forages à équiper. Prononce-toi.

TROUVE L'ERREUR

Analyser une solution fautive est l'un des meilleurs moyens d'apprendre. Pour chaque ligne, repère l'erreur, explique-la, puis corrige.

Ce qu'on écrit (X faux)	Pourquoi c'est faux, et la correction
$-5 < 2$ donc $(-5)^2 < 2^2$	Le passage au carré ne conserve l'ordre que pour les nombres positifs . Ici $(-5)^2 = 25 > 4 = 2^2$: sur les négatifs, il inverse l'ordre.
$ x = 5$ donc $x = 5$	On oublie une solution. $ x = 5 \iff x = 5$ ou $x = -5$.
100 est le maximum de $[0 ; 100[$	$100 \notin [0 ; 100[$ (crochet ouvert). L'intervalle n'a pas de maximum ; 100 en est seulement la borne supérieure .
$\sqrt{a^2} = a$	Faux si $a < 0$: en réalité $\sqrt{a^2} = a $. Exemple : $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = -3 $.
$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	La racine ne se distribue pas sur une somme. Contre-exemple : $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, alors que $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$.
« $-2 < x < 3$ donc $4 < x^2 < 9$ »	Le nombre x change de signe sur cet intervalle : on ne peut pas élever les bornes au carré. En réalité x^2 vaut au minimum 0, atteint pour $x = 0$, donc $0 \leq x^2 < 9$.
« $-3 < x < -1$ et $2 < y < 4$, donc $-6 < xy < -4$ »	La règle du produit d'encadrements ne vaut que pour des réels strictement positifs . Il faut d'abord passer à l'opposé : $1 < -x < 3$, donc $2 < -xy < 12$, donc $-12 < xy < -2$.
« $ x-1 = -4$ donc $x-1 = -4$ »	Une valeur absolue n'est jamais négative : l'équation n'a aucune solution. On conclut sans calculer.

BILAN DU CHAPITRE

Mots-clés :

- **Ensembles de nombres** : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (Leçon 1).
- **Réel** : tout nombre de l'ensemble $\mathbb{R}$, représenté par un point de la droite graduée (Leçon 1).
- **Ordre** : $a < b$ signifie $b - a > 0$; comparer, c'est étudier le signe de la différence (Leçon 1).
- **Quantité conjuguée** : $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$, pour rendre rationnel un dénominateur (Leçon 1).
- **Tableau de signes** : outil d'étude du signe d'un produit ou d'un quotient (Leçon 1).
- **Intervalle** : ensemble de réels « sans trou » entre deux bornes ; **centre**, **rayon**, **amplitude** (Leçon 2).
- **Réunion et intersection** : $A \cup B$ (« ou »), $A \cap B$ (« et ») (Leçon 2).
- **Valeur absolue** : $|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x < 0$; toujours positive (Leçon 2).
- **Distance** : $d(a; b) = |b - a|$ (Leçon 2).
- **Majorant / minorant** : nombre $\geq$ (resp. $\leq$) à tous les éléments d'une partie (Leçon 3).
- **Maximum / minimum** : majorant (resp. minorant) qui **appartient** à la partie (Leçon 3).
- **Encadrement** : $a \leq x \leq b$; **amplitude** = $b - a$ (Leçon 4).
- **Valeur approchée, arrondi, troncature, ordre de grandeur** (Leçon 4).
- **Inégalité triangulaire** : $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Leçon 4).
- **Irrationnel / partie entière** : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; $E(x)$ = plus grand entier $\leq x$ (Leçon 5).

L'essentiel à retenir

CE QU'IL FAUT RETENIR

- Pour **comparer** deux réels, on étudie le **signe de leur différence** (ou, pour deux positifs, on compare le quotient à 1).
- Le **passage au carré et à la racine carrée conserve l'ordre des réels positifs** ; le passage à l'**inverse l'inverse** (pour deux réels strictement positifs).
- $|x - a| < r$ équivaut à $x \in]a - r; a + r[$: la valeur absolue traduit une **distance**.
- Un **majorant** n'appartient pas forcément à l'ensemble ; un **maximum**, si. Une partie peut être majorée **sans** avoir de maximum.
- Pour des réels **positifs**, on encadre une somme, une différence, un produit et un quotient en combinant les bornes ; on ne garde dans une valeur approchée que les **décimales sûres**.
- Pour étudier le signe d'un produit ou d'un quotient, on **factorise** puis on dresse un **tableau de signes**.
- $|x - a| \leq r$ donne un intervalle de centre a ; $|x - a| \geq r$ donne une **réunion** de deux intervalles.
- L'**inégalité triangulaire** permet de **majorer** sans calculer : premier réflexe d'Analyse.

FICHE DE RÉVISION

Tout le chapitre en une page : définitions, formules et méthodes. A relire avant un devoir.

Ensembles de nombres. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Un réel est **rationnel** s'il s'écrit $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) ; sinon il est **irrationnel** (ex. $\sqrt{2}, \pi$).

Comparer deux réels. $a < b \iff b - a > 0$: comparer, c'est étudier le **signe de la différence** $a - b$ (ou, pour deux positifs, comparer le quotient $\frac{a}{b}$ à 1).

- Ajouter un même réel : conserve l'ordre. Multiplier par $c > 0$: conserve ; par $c < 0$: **inverse** le sens.
- $0 \leq a \leq b \implies a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$. Pour deux positifs, $0 < a \leq b \implies \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.

Valeur absolue. $|x| = x$ si $x \geq 0$; $|x| = -x$ si $x < 0$. Toujours $|x| \geq 0$; $|ab| = |a| \cdot |b|$; $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inégalité triangulaire).

- $|x| = r \iff x = r$ ou $x = -r$. $|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r$.
- **Distance** : $d(a; b) = |b - a|$. Ainsi $|x - c| \leq r \iff x \in [c - r; c + r]$.

Intervalles. $[a; b]$ fermé, $]a; b[$ ouvert ; une borne $\pm\infty$ est toujours ouverte. Centre $c = \frac{a + b}{2}$, rayon $r = \frac{b - a}{2}$, amplitude $b - a$.

Réunion et intersection. $A \cap B$: partie couverte par les **deux** intervalles ; $A \cup B$: partie couverte par **au moins un** des deux. On décide chaque crochet borne par borne, après avoir dessiné.

Signe d'un produit ou d'un quotient. Factoriser, chercher les racines de chaque facteur, dresser le tableau de signes, marquer d'une double barre la valeur interdite au dénominateur.

Rendre rationnel un dénominateur. Multiplier haut et bas par $\sqrt{b}$, ou par la **quantité conjuguée** $a - \sqrt{b}$ si le dénominateur est $a + \sqrt{b}$.

Puissances entières. $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $a^m \div a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^n b^n$; $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$; $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ($a \neq 0$).

Identités remarquables. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. **Degré 3 (Leçon 6)** : $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$; $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

Racine carrée. Pour $a \geq 0$: $\sqrt{a} \geq 0$; $(\sqrt{a})^2 = a$; $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$; $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$; $\sqrt{a^2} = |a|$. **Écriture scientifique** : $a \times 10^n$ avec $1 \leq a < 10$.

Majorant, minorant, maximum, minimum. M **major**e A si tout x de A vérifie $x \leq M$. Le **maximum** est un majorant qui **appartient** à A (de même pour le minimum). Une partie peut être majorée **sans** avoir de maximum.

Encadrement. De $a \leq x \leq b$ et $c \leq y \leq d$ (réels positifs) : $a + c \leq x + y \leq b + d$ et $ac \leq xy \leq bd$.

Amplitude = $b - a$.

Partie entière. $E(x)$ = plus grand entier $\leq x$. Exemples : $E(3,7) = 3$; $E(-3,2) = -4$.

Méthodes-clés. Comparer $\rightarrow$ signe de la différence. Résoudre $|x - a| \leq r \rightarrow$ intervalle $[a - r; a + r]$. Simplifier $\sqrt{n} \rightarrow$ sortir le plus grand carré parfait. Majorer une expression $\rightarrow$ inégalité triangulaire.

CORRIGES

Corrigés des prérequis

P1. -15 ; $7 + 8 = 15$. **P2.** $\frac{11}{12}$; $\frac{1}{4}$. **P3.** 7 ; 20 ; $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. **P4.** 10^8 ; $3,2 \times 10^4$. **P5.** $-3 < -\frac{5}{4} < -\frac{1}{2} < 0 < 2$. **P6.** a) 9 et -27 ; b) 1 ; c) $\frac{1}{8}$; d) a^6 ; e) $16x^{12}$; f) $\frac{32}{243}$.

Corrigés « A toi de jouer ! »

1. a) $\frac{5}{3} - \frac{8}{5} = \frac{1}{15} > 0$, donc $\frac{5}{3} > \frac{8}{5}$. b) $\frac{2}{7} - \frac{3}{11} = \frac{1}{77} > 0$, donc $\frac{2}{7} > \frac{3}{11}$. c) $-\frac{5}{7} + \frac{7}{9} = \frac{4}{63} > 0$, donc $-\frac{5}{7} > -\frac{7}{9}$. d) $-\frac{7}{4} + \frac{9}{5} = \frac{1}{20} > 0$, donc $-\frac{7}{4} > -\frac{9}{5}$.
2. $x = 0,2$; $x^2 = 0,04$; $\sqrt{x} \approx 0,447$; $\frac{1}{x} = 5$. Ordre : $x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$.
3. a) $-1 < x < 5$, soit $] -1 ; 5[$. b) $-6 \leq x \leq 4$, soit $[-6 ; 4]$.
4. a) $x = 10$ ou $x = -2$. b) $x = 5$ ou $x = -4$.
5. $A = \{2 ; \dots ; 8\}$. Majorants : $8, 9, 10$; minorants : $2, 1, 0$; $\max A = 8$; $\min A = 2$.
6. $I =] -3 ; 7]$. Majorant : 7 ; minorant : -3 ; $\max I = 7$; pas de minimum ($-3 \notin I$).
7. $7,5 \leq x + y \leq 7,9$; $11,34 \leq xy \leq 12,88$.
8. Troncature 10^{-2} : $7,13$; arrondi : $7,14$. Ordre de grandeur : $412 \times 0,49 \approx 200$.
9. a) 5 ; b) -3 ; c) 7 ; d) $E(\sqrt{7}) = 2$ (car $2 < \sqrt{7} < 3$).
10. Si $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ irréductible, alors $p^2 = 3q^2$; donc 3 divise p^2 puis p ($p = 3k$); alors $q^2 = 3k^2$, donc 3 divise q : contradiction. $\sqrt{3}$ est irrationnel. 11. a) $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $(2x-1)^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$. b) $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$ (ligne 1, 4, 6, 4, 1 du triangle).
12. a) $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$. b) $8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3 = (2x+1)(4x^2 - 2x + 1)$.

Corrigés de l'auto-évaluation

1. $-7 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ seulement. 2. $-2 < -\frac{5}{3} < 0 < 1 < \frac{3}{2}$. 3. $\frac{9}{7} - \frac{13}{10} = -\frac{1}{70} < 0$, donc $\frac{9}{7} < \frac{13}{10}$.
4. $x^2 < x < \sqrt{x} < \frac{1}{x}$. 5. 9 ; 7 ; 8 . 6. a) $[-2 ; 4[$; b) $]5 ; +\infty[$. 7. $x = 8$ ou $x = -2$. 8. $[-3 ; 5]$. 9. Majorant : 9 ; $\max = 9$; $\min = 1$. 10. Faux : $10 \notin [2 ; 10]$, donc pas de maximum. 11. $4,7 \leq x + y \leq 5,1$; $4,8 \leq xy \leq 5,78$. 12. Arrondi : $5,27$; troncature : $5,27$. 13. $|a+b| \leq 7$. 14. $7,2 \times 10^{-4}$; ordre de grandeur ≈ 1200 . 15. $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$. 16. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. 17. Intersection : $]1 ; 5]$; réunion : $[-2 ; 8[$. 18. Centre 2 , rayon 5 , amplitude 10 . 19. $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 20. $x \leq -1$ ou $x \geq 5$, soit $]-\infty ; -1] \cup [5 ; +\infty[$.

Corrigés « Je m'exerce » (exercices impairs)

13. a) $\in$; b) $\notin$; c) $\notin$; d) $\notin$; e) $\in$; f) $\notin$ ($-\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$).
15. a) $\frac{1}{15} > 0 \rightarrow \frac{5}{3} > \frac{8}{5}$; b) $\frac{1}{77} > 0 \rightarrow \frac{2}{7} > \frac{3}{11}$; c) $\frac{1}{20} > 0 \rightarrow \frac{9}{4} > \frac{11}{5}$.
17. $\frac{3}{5} + \frac{5}{7} = \frac{46}{35} > 1$: impossible (cela dépasserait le gâteau entier).
19. a) $0,09 < 0,3 \rightarrow x^2 < x$; b) $x^2 = x$; c) $16 > 4 \rightarrow x^2 > x$; d) $6,25 > 2,5 \rightarrow x^2 > x$.
21. Numérateur $\frac{57}{12}$; dénominateur $\frac{5}{8}$; $B = \left(\frac{57}{12}\right) \times \left(\frac{8}{5}\right) = \frac{38}{5}$.

23. a) 2^8 ; b) 10^3 ; c) 3^6 ; d) 5^2 .

25. a) $1,03 \times 10^{-8}$; b) 5×10^{15} ; c) $1,2 \times 10^{-8}$.

27. a) $3\sqrt{2}$; b) $4\sqrt{3}$; c) $5\sqrt{3}$; d) 12.

29. a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$; c) $\sqrt{3} - 1$.

31. a) positif si $x < -1$ ou $x > 2$, négatif si $-1 < x < 2$ ($x = 2$ interdit); b) $x - 2$ ($x \neq -2$): négatif si $x < 2$, positif si $x > 2$.

33. $x^2 - x(x + 3) = -3x$: positif si $x < 0$, nul si $x = 0$, négatif si $x > 0$.

35. a) $[-3; 2]$; b) $[7; +\infty[$; c) $[\frac{7}{2}; +\infty[$; d) $[-1; 1[$; e) $]-2; 2]$.

37. a) 15; b) 25; c) 0; d) 7; e) $5 - 5 = 0$.

39. Pas de réel commun: $[1; 4[$ impose $x \geq 1$, mais $]-\infty; 1[$ impose $x < 1$.

41. a) $x = 1$ ou $x = -7$; b) $x = 8,2$ ou $x = -0,2$; c) $]-5; 1[$.

43. a) $]-\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}] \cup [\frac{1}{3}; 1[$; b) $[\frac{5}{2}; \frac{9}{2}]$; c) $]-\infty; -3] \cup [5; +\infty[$.

45. a) $|x - 2| \leq 5$; b) $|x + 1| \geq 3$; c) $|x - 7| < 5$.

47. $MA = |x - 3|$, $MB = |x + \frac{3}{2}|$. $MA \leq 3$: $[0; 6]$; $MB \leq \frac{7}{2}$: $[-5; 2]$; les deux: $[0; 2]$.

49. $-\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{3}$; seul entier: $x = 0$.

51. Premier: $]-\frac{1}{4}; \frac{9}{4}[$; second: $[\frac{3}{20}; \frac{1}{4}]$; intersection: $[\frac{3}{20}; \frac{1}{4}]$.

53. a) $|x - 8| < 5$, soit $]3; 13[$; b) $|x - 1| \leq 0,1$, soit $[0,9; 1,1]$.

55. Majorants: 8, 9, 10; minorants: 2, 1, 0; max = 8; min = 2.

57. $I = [-1; \sqrt{3}]$: max = $\sqrt{3}$, min = -1 , borné. $J =]-\infty; \frac{3}{2}[$: ni max ni min, non borné.

$K = [0; +\infty[$: min = 0, pas de max, non borné.

59. Ordre: $-7,4 < -\sqrt{5} < 0 < \frac{19}{7} < \pi$; max = π ; min = $-7,4$; L est borné.

61. A: majorants 8, 9, 10, 11; minorants 2, 1, 0, -1 . $B = \{-3, \dots, 7\}$: majorants 7, 8, 9, 10; minorants $-3, -4, -5, -6$.

63. $7,5 \leq x + y \leq 7,9$; $-3,5 \leq x - y \leq -3,1$; $11,34 \leq xy \leq 12,88$; $0,375 \leq \frac{x}{y} \leq 0,426$ environ.

65. $L = \text{aire} \div \text{largeur}$: $10,5 \leq L \leq 16(m)$; $P = 2(L + \text{largeur})$: $33 \leq P \leq 48(m)$.

67. 1^{er}: $(\frac{3}{4})h$; 2^e: $(\frac{9}{16})h$; 3^e: $(\frac{27}{64})h$. Pour $h = 5$: $3,75m$; $2,81m$; $2,11m$.

69. $|a + b| \leq 7$; $|a - b| \leq 7$; $|a \times b| \leq 10$.

71. $-1 < x < 2$ et $-3 < y < -1$: $0 < x - y < 5$; $|x + 3| - |y| \in]-1; 4[$.

73. a) 3,14; b) 1,41; c) 0,67.

75. a) $|-2| = 2 \leq 8$ ✓; b) $|-5| = 5 \leq 9$ ✓. Égalité si a et b sont de même signe (ici jamais).

Corrigés « J'approfondis » (sélection)

77. Prix de vente = achat $\times (1 + \text{marge})$: $12000 \times 1,20 = 14400$; $15000 \times 1,30 = 19500$. Intervalle $[14400; 19500]$ FCFA.

79. Parts: $6 + 9 + 11 = 26$; une part = 15 kg $\rightarrow 90, 135, 165$ kg; somme = 390 kg. ✓

81. $|m - 500| < 4 \iff 496 < m < 504$. Conformes: 503 g et 497 g.

83. $A \times B = \sqrt{49 - 48} = 1$; $X^2 = 14 + 2 = 16$, donc $X = 4$; $A = 2 + \sqrt{3}$, $B = 2 - \sqrt{3}$.

85. a) $S^2 = 8 + 2\sqrt{9} = 14$, donc $S = \sqrt{14}$. b) $(1 + \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2}$.

87. $L = \left(\frac{5}{3}\right) \div \left(\frac{7}{10}\right) + \frac{7}{8} = \frac{50}{21} + \frac{7}{8} = \frac{547}{168}$.

89. $\left(1 - \frac{1}{a}\right) \div \left(1 + \frac{1}{a}\right) = \frac{a-1}{a+1}$, donc $M = \frac{a+1}{a+1} = 1$.

91. $S = 222 \times s$, donc $S \div s = 222$, quel que soit le choix des trois chiffres.

93. Un majorant majore sans forcément appartenir ; un maximum **appartient** à la partie. Ex. : $[0 ; 1[$ est majoré par 1 mais n'a pas de maximum.

94. a) $3 - \sqrt{2}$ (positif) ; b) $3 - \sqrt{7}$ (car $\sqrt{7} < 3$) ; c) $\sqrt{5} - 2$ (car $\sqrt{5} > 2$) ; d) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ (car $\sqrt{5} > \sqrt{3}$).

95. Si $x < -1$: $-2x + 1$; si $-1 \leq x < 2$: 3 ; si $x \geq 2$: $2x - 1$.

97. a) $(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1) = x$. b) Pour $x = 8 \times 10^{-6}$: $\approx \frac{1}{2} = 0,5$.

99. b) Comme $\sqrt{1+x} + 1 \geq 1$, on a $0 \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq x$. c) $\sqrt{1,0004} \approx 1,0002$.

100. a) $\in (0,25 = \frac{1}{4})$; b) $\in (\sqrt{9} = 3)$; c) $\notin$; d) $\in (2\sqrt{3} - \sqrt{12} = 0)$.

101. a) Complémentaire de $[2 ; 5]$: $] - \infty ; 2[\cup] 5 ; +\infty[$. b) Complémentaire de $] - \infty ; 3[: [3 ; +\infty[$. Complémentaire de $[-1 ; +\infty[$: $] - \infty ; -1[$.

102. a) $3,14 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < 3,16$; $2,4393 < \sqrt{2} \times \sqrt{3} < 2,4708$. b) $\sqrt{6} \approx 2,45$.

103. On part de l'inégalité triangulaire : $|a| = |(a+b) + (-b)| \leq |a+b| + |-b| = |a+b| + |b|$. Donc $|a| - |b| \leq |a+b|$, c'est-à-dire $|a+b| \geq |a| - |b|$. *Interprétation* : la distance de $a+b$ à 0 est au moins égale à la différence des distances de a et de b à 0.

104. $27,2 \leq \ell \leq 27,6$; $217,6 \leq 8\ell \leq 220,8$ (cm). La bande de 220 cm **ne suffit pas à coup sûr**.

Démonstrations guidées (98, 101, 103) et corrigés détaillés : à rédiger en suivant les étapes de l'énoncé.

Corrigés des exercices supplémentaires (sélection)

105. a) $-\frac{15}{7} - \left(-\frac{13}{6}\right) = \frac{1}{42} > 0 \rightarrow -\frac{15}{7} > -\frac{13}{6}$; b) $\frac{3}{20} > 0 \rightarrow -\frac{5}{4} > -\frac{7}{5}$; c) $\frac{1}{12} > 0 \rightarrow -\frac{2}{3} > -\frac{3}{4}$.

106. a) $\pi > 3$ donc $-\pi < -3$; b) $\sqrt{5} > 2$ donc $-\sqrt{5} < -2$; c) $7 < \frac{64}{9}$ donc $\sqrt{7} < \frac{8}{3}$.

107. a) $\frac{1}{-3} = -0,33 < -0,2 = \frac{1}{-5}$; b) $-\frac{2}{7} \approx -0,286 > -0,3 = -\frac{3}{10}$.

108. $-1,8 < -\sqrt{3} (\approx -1,732) < -1,7 < -\frac{5}{3} (\approx -1,667)$.

109. a) $]0,5 ; 1,6[$; b) $] - 4,5 ; -3,4[$; c) $xy < 0$: $] - 4,5 ; -2,8[$; d) $\frac{x}{y} < 0$: $] - 0,75 ; -0,467[$ environ.

110. $1,9881 \leq x^2 \leq 2,0164 \rightarrow 3,9762 \leq 2x^2 \leq 4,0328 \rightarrow -1,0238 \leq A(\sqrt{2}) \leq -0,9672$.

111. $\frac{3}{x}$ décroît : $\frac{3}{5} \leq \frac{3}{x} \leq \frac{3}{2} \rightarrow -0,4 \leq B(x) \leq 0,5$.

112. a) $M = 5, g = 4$; b) $M - g = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$, donc $M \geq g$.

113. Voir le corrigé 10 (même raisonnement avec 3).

114. $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$; si $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ était rationnel, son carré le serait, donc $\sqrt{6}$ le serait : or $\sqrt{6}$ est irrationnel : **contradiction**, $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

115. a) 2 ; b) -4 ; c) 3 ; d) -4.

116. b) $4,3 - 4 = 0,3$; $-4,3 - (-5) = 0,7$.

117. $|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|$, d'où $|a| - |b| \leq |a-b|$.

118. a) $x = 3$ ou $x = -2$; b) $[-5; -1]$; c) $]-\infty; 3[\cup]5; +\infty[$.
119. $x < -2 : f(x) = 3$; $-2 \leq x < 1 : f(x) = -2x - 1$; $x \geq 1 : f(x) = -3$.
120. a) $]0,503; 0,505[$; b) $] - 0,3635; -0,361[$ environ; c) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ (positif) est le plus grand.
121. a) $3,15 \times 5,6 \times 3,3 = 58,212 \leq V \leq 3,16 \times 5,7 \times 3,4 = 61,2408$; b) $E(58,212) = 58$ et $E(61,2408) = 61$.
123. Deux négatifs sont à gauche de 0; celui qui est « le plus loin » de 0 (grande valeur absolue) est le plus à gauche, donc le plus petit. Ex. : $-5 < -2$ alors que $|-5| > |-2|$.
125. a) $3\sqrt{2}$; b) $6\sqrt{2}$; c) $5\sqrt{5}$; d) 25; e) $8\sqrt{3}$; f) $36\sqrt{2}$; g) $-9\sqrt{5}$; h) $-39\sqrt{2}$; i) $4\sqrt{3}$; j) $18\sqrt{7}$; k) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$; l) 20; m) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$; n) $2 - \sqrt{2}$; o) $\sqrt{2} - 1$; p) $3 + \sqrt{2}$; q) $\sqrt{7} - 2$; r) $2\sqrt{3}$; s) $2\sqrt{5}$; t) $1 + \sqrt{2}$; u) $\frac{\sqrt{22+3\sqrt{2}}}{2}$; v) 6.
127. a) $\frac{1}{\sqrt{7}-1} = \frac{\sqrt{7}+1}{6} = \frac{1}{6} + (\frac{1}{6})\sqrt{7}$; b) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}$.
129. a) Soleil $\approx 1,41 \times 10^{18} \text{ km}^3$, Terre $\approx 1,10 \times 10^{12} \text{ km}^3$ (avec $\pi = \frac{22}{7}$); b) $k = (696 \frac{000}{6} 400)^3 = (108,75)^3 \approx 1,29 \times 10^6$.
131. a) 5; b) $\frac{1}{32}$; c) 1; d) -1 .
133. a) $1,6715 \times 10^{-13}$; b) 150 millions de km $= 1,5 \times 10^8 \text{ km} = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$.
134. a) $(x-4)(3x+2)$; b) $(3x+5)(x+2)$; c) $-5x(x+6)$; d) $4(4-x)(5+x)$; e) $(x-2)(x-4)$.
135. $2 < x < 3$: a) $4 < x^2 < 9$; b) $\frac{1}{3} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ donc $\frac{2}{3} < \frac{2}{x} < 1$; c) la fonction $\frac{x-1}{x+5}$ est croissante : $\frac{1}{7} < \frac{x-1}{x+5} < \frac{1}{4}$.
137. Sur $[2; 3]$, $x^2 - 3x + 5$ est croissante (sommet en $\frac{3}{2} < 2$) : $f(2) = 3$ et $f(3) = 5$, donc $3 \leq x^2 - 3x + 5 \leq 5$, ce qui entraîne $0 \leq x^2 - 3x + 5 \leq 8$.
139. a) $x \geq \frac{5}{2}$; b) $x < 2$; c) $x < \frac{7}{3}$; d) $x \geq 0$.
141. a) $E =] - 3; 5[$ pour centre 1 et rayon 4 : $|x-1| < 4$; b) $F =] - 10; -2[$ pour centre -6 et rayon 4 : $|x+6| < 4$.
143. $d(A; B) = 6$. (i) $x = -2$ ou $x = 6$; (ii) $|x+1| = 3|x-5|$ donne $x = 3,5$ ou $x = 8$.
145. a) $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$; b) aucune solution réelle (un carré n'est jamais négatif).
147. $A = \frac{11}{24}$; $B = -\frac{47}{15}$; $C = \frac{2}{21}$; $D = \frac{6}{5}$; $E = \frac{2}{3}$.
149. $A = \frac{5}{8}$; $B = \frac{7}{11}$.
151. $A = \frac{2025}{14}$; $B = \frac{188}{27}$.
153. $A = \frac{25}{64}$; $B = \frac{1}{8}$.
155. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = (x^2 + 1)^2 - x^2$, soit $x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = x^4 + x^2 + 1$.
157. $A = a^7 b^{-6} c^5$; $B = a^{-8} b^{-2} c^{-5}$; $C = a^{-2} b^{-2} c^{-2}$; $D = ab^9 c^6$; $E = a^{-6} b^{-7}$.

Corrigés des situations d'intégration (corrigés-types)

Situation 1 (Dédougou). Le rendement est le quotient de la récolte par la surface cultivée :

$\frac{4\,200}{4\,000} = \frac{21}{20} = 1,05$ tonne par hectare. Un contrôle d'ordre de grandeur le confirme sans aucun calcul posé : 4 000 tonnes récoltées sur 4 000 hectares donneraient exactement 1 tonne par hectare, et la récolte annoncée dépasse à peine ce chiffre. Le nombre du délégué est donc dix fois trop grand, car un rendement

de 10,5 tonnes à l'hectare supposerait une récolte de $4\,000 \times 10,5 = 42\,000$ tonnes, soit dix fois ce qui est réellement entré à l'usine. **Le directeur ne doit pas faire imprimer cette phrase : le rendement réel est de 1,05 tonne à l'hectare, ce qui reste un bon résultat pour du coton graine et c'est ce chiffre qu'il faut annoncer aux producteurs.** Le nombre de saisonniers et le coût du transport d'une tonne sont des données parasites.

Situation 2 (Ouagadougou). Une lecture de 1,84 m à 1 cm près signifie que la vraie longueur L d'une planche vérifie $1,83 \leq L \leq 1,85$. Les six planches étant identiques, la longueur de bois nécessaire vaut $6L$; en multipliant l'encadrement par 6, qui est strictement positif, le sens des inégalités est conservé et l'on obtient $10,98 \leq 6L \leq 11,10$. L'amplitude de cet encadrement vaut $11,10 - 10,98 = 0,12$ m, ce qui n'a rien de négligeable. Or la barre mesure 11,05 m, et ce nombre se trouve à l'intérieur de l'encadrement : selon la vraie longueur des planches, il faudra entre 10,98 m et 11,10 m de bois. **Boureima ne peut donc pas tenir sa promesse à coup sûr : sa mesure ne permet pas de trancher.** Il doit prévenir le client et se procurer une barre d'au moins 11,10 m, ou mesurer plus précisément. Le temps de séchage de la colle et le nombre d'apprentis sont des données parasites.

Situation 3 (Banfora). La condition du client est une condition de distance : la masse m d'un sachet convient lorsque $|m - 500| \leq 5$, c'est-à-dire lorsque $500 - 5 \leq m \leq 500 + 5$, soit $495 \leq m \leq 505$. Les masses acceptées forment donc l'intervalle $[495 ; 505]$. On calcule l'écart de chaque sachet à la cible : 3 g, 3 g, 6 g, 1 g et 6 g. Les sachets de 503 g, 497 g et 499 g sont conformes ; ceux de 506 g et de 494 g ne le sont pas, puisque leur écart dépasse 5 g. **Deux sachets sur cinq sortent de la tolérance, et de part et d'autre de la cible : le chef de chaîne doit arrêter la machine et la faire régler avant de poursuivre l'ensachage.** Un défaut trop lourd et un défaut trop léger ne se compensent pas, ils signalent une machine irrégulière. L'heure d'ouverture de la cantine et le nombre de sachets par carton sont des données parasites.

Situation 4 (Léo). On range les masses relevées : $48 < 49 = 49 < 50 < 51 < 52$. Aucune ne dépasse 53, donc 53 est un majorant de cet ensemble de masses et la condition posée par l'acheteur est remplie : le lot est acceptable. Mais un majorant n'a pas besoin d'appartenir à l'ensemble, et c'est le cas ici : 53 n'est la masse d'aucun sac. La masse la plus lourde réellement pesée est 52 kg, et c'est elle le maximum ; le minimum vaut 48 kg. La mention « sac le plus lourd : 53 kg » est donc fausse et surestime d'un kilogramme le sac le plus lourd. **Soungalo peut accepter la vente, mais il ne doit pas signer le bon tel quel : il faut faire écrire qu'aucun sac ne dépasse 53 kg et que le plus lourd pèse 52 kg.** La durée de la pesée et le nombre de membres de la coopérative sont des données parasites.

Situation 5 (Bagré). Les deux dimensions sont strictement positives, on peut donc multiplier les encadrements membre à membre : de $24 \leq \ell \leq 25$ et $60 \leq L \leq 62$ on tire $24 \times 60 \leq S \leq 25 \times 62$, soit $1\,440 \leq S \leq 1\,550$, en mètres carrés. Comme un sac couvre 50 m^2 , le nombre de sacs nécessaires est compris entre $\frac{1\,440}{50} = 28,8$ et $\frac{1\,550}{50} = 31$: on ne commande que des sacs entiers, il en faudra donc au moins 29 et au plus 31. Pour être à l'abri d'un manque, c'est la borne haute qu'il faut retenir, ce qui donne une dépense maximale de $31 \times 4\,000 = 124\,000$ FCFA. **L'enveloppe de 130 000 FCFA suffit à coup sûr, avec une marge de 6 000 FCFA : le comité peut la valider sans risque.** La distance au barrage et la durée de la campagne sont des données parasites.

Situation 6 (Dori). Être à moins de 4 km du puits P, situé au kilomètre 6, s'écrit $|x - 6| < 4$, où x désigne la position d'un point de la piste. Cette condition équivaut à $6 - 4 < x < 6 + 4$, c'est-à-dire à $x \in]2 ; 10[$: la zone retenue est la portion de piste comprise entre les kilomètres 2 et 10. Le forage A est au kilomètre 3 et

sa distance au puits vaut $|3 - 6| = 3$; comme $3 < 4$, il appartient à la zone. Le forage B est au kilomètre 11 et sa distance vaut $|11 - 6| = 5$; comme $5 > 4$, il en est exclu, et il s'en faut de 1 km pour qu'il y entre. **Le chef de service ne peut retenir cette année que le forage A ; le forage B devra attendre un autre programme.** La longueur totale de la piste et le rythme d'abreuvement du troupeau sont des données parasites.

Grille de correction APC

Le barème, identique pour les six situations. Chacun des trois critères minimaux vaut 3 points et compte 6 indicateurs observables ; le critère de perfectionnement vaut 1 point et en compte 3. Conversion : 0 à 1 indicateur validé → **0 pt** ; 2 à 3 → **1 pt** (partiel) ; 4 à 5 → **2 pts** (maîtrisé) ; 6 → **3 pts**. L'élève est déclaré **compétent** si aucun critère minimal n'est à 0 et si un seul au plus est au niveau partiel. S'il est compétent, on ajoute le critère de perfectionnement (validé si au moins 2 de ses 3 indicateurs le sont) et un **bonus de 1 point** ; sinon, ni perfectionnement ni bonus. La note est plafonnée à 10, puis multipliée par 2 pour le bulletin.

CP — Perfectionnement (les six situations). La production est claire, bien organisée et grammaticalement correcte ; la démarche est concise, sans calcul inutile ; la conclusion est mise en évidence et soigneusement présentée.

Situation 1 — Le rendement annoncé

- **C1 Pertinence** : a compris qu'un rendement se calcule en rapportant la récolte à la surface cultivée ; a reconnu qu'il fallait vérifier l'annonce du délégué avant de la publier ; a choisi la division de 4 200 par 4 000 et non une soustraction ; a pensé à contrôler le résultat par un ordre de grandeur ; a confronté le chiffre obtenu à un rendement plausible de coton graine ; a écarté le nombre de saisonniers et le coût du transport d'une tonne.
- **C2 Outils** : a posé le quotient $\frac{4\,200}{4\,000}$; l'a simplifié en $\frac{21}{20}$; a obtenu la valeur exacte 1,05 ; a établi l'ordre de grandeur $\frac{4\,000}{4\,000} = 1$; a calculé $4\,000 \times 10,5 = 42\,000$; a obtenu le rapport $42\,000 \div 4\,200 = 10$.
- **C3 Cohérence** : a exprimé le rendement en tonnes par hectare et non en tonnes ; a enchaîné le calcul, le contrôle et la comparaison sans rupture ; a jugé 1,05 conforme à l'ordre de grandeur attendu pour du coton graine ; a énoncé que l'annonce est dix fois trop grande ; a formulé une décision nette sur l'affiche à imprimer ; a fourni au directeur le chiffre exact à annoncer à la place.

Situation 2 — Les six planches du menuisier

- **C1 Pertinence** : a compris qu'une mesure à 1 cm près n'est pas une longueur exacte ; a vu que les six planches ont la même longueur inconnue ; a choisi d'encadrer plutôt que de multiplier la valeur lue ; a compris que la promesse « à coup sûr » se joue sur la borne haute ; a pensé à situer la longueur de la barre par rapport à l'encadrement obtenu ; a écarté le temps de séchage de la colle et le nombre d'apprentis.
- **C2 Outils** : a obtenu $1,84 - 0,01 = 1,83$; a obtenu $1,84 + 0,01 = 1,85$; a multiplié l'encadrement par 6 sans en changer le sens ; a calculé $6 \times 1,83 = 10,98$; a calculé $6 \times 1,85 = 11,10$; a calculé l'amplitude $11,10 - 10,98 = 0,12$.

- **C3 Cohérence** : a conservé les mètres tout au long du calcul ; a vérifié que la borne basse reste inférieure à la borne haute ; a constaté que 11,05 est situé entre 10,98 et 11,10 ; a compris que ce placement interdit de conclure ; a formulé une réponse prudente au lieu d'un oui ou d'un non hasardeux ; a indiqué à Boureima la longueur de barre qui lèverait le doute.

Situation 3 — Les sachets de la sucrerie

- **C1 Pertinence** : a traduit « s'écarter d'au plus 5 g » par une condition de distance ; a reconnu la forme $|m - 500| \leq 5$; a compris que la tolérance joue des deux côtés de la cible ; a choisi de comparer chaque sachet à l'intervalle plutôt que de faire une moyenne ; a compris que la décision porte sur le réglage de la machine et non sur un seul sachet ; a écarté l'heure d'ouverture de la cantine et le nombre de sachets par carton.
- **C2 Outils** : a écrit $|m - 500| \leq 5$; a obtenu $500 - 5 = 495$; a obtenu $500 + 5 = 505$; a écrit l'intervalle $[495 ; 505]$; a calculé les cinq écarts 3, 3, 6, 1 et 6 ; a dénombré 3 sachets conformes et 2 hors tolérance.
- **C3 Cohérence** : a exprimé toutes les masses en grammes ; a comparé chaque écart au seuil de 5 g sans en oublier aucun ; a relevé que les deux défauts se situent de part et d'autre de la cible ; a tiré de ce constat une conclusion sur le réglage de la machine ; a formulé une décision nette d'arrêt de la chaîne ; a rendu la réponse directement utilisable par le chef de chaîne.

Situation 4 — Le bon de pesée

- **C1 Pertinence** : a compris que la condition de l'acheteur porte sur toutes les masses à la fois ; a reconnu que 53 joue le rôle de majorant ; a séparé la question de l'acceptation du lot de celle de la phrase écrite sur le bon ; a cherché la masse la plus lourde réellement pesée ; a compris qu'un majorant n'appartient pas forcément à l'ensemble ; a écarté la durée de la pesée et le nombre de membres de la coopérative.
- **C2 Outils** : a rangé les six masses en $48 < 49 = 49 < 50 < 51 < 52$; a vérifié que chaque masse est inférieure ou égale à 53 ; a donné 52 comme maximum ; a donné 48 comme minimum ; a constaté que 53 n'est la masse d'aucun sac ; a calculé l'écart $53 - 52 = 1$.
- **C3 Cohérence** : a exprimé toutes les masses en kilogrammes ; a distingué la conclusion sur le lot de la conclusion sur la mention du bon ; a justifié que la condition d'achat est bien remplie ; a expliqué en quoi la mention « 53 kg » est fausse ; a formulé une décision claire pour Soungalo ; a proposé une rédaction corrigée du bon.

Situation 5 — Les semences de la parcelle

- **C1 Pertinence** : a compris que l'aire de la parcelle n'est pas connue exactement ; a vérifié que les deux dimensions sont strictement positives avant de multiplier les encadrements ; a choisi la borne haute puisqu'il s'agit de se prémunir d'un manque ; a compris qu'on ne commande que des sacs entiers ; a rapproché la dépense maximale de l'enveloppe annoncée ; a écarté la distance au barrage et la durée de la campagne.
- **C2 Outils** : a écrit $24 \leq \ell \leq 25$ et $60 \leq L \leq 62$; a calculé $24 \times 60 = 1\,440$; a calculé $25 \times 62 = 1\,550$; a divisé les deux bornes par 50 et obtenu 28,8 et 31 ; a calculé $31 \times 4\,000 = 124\,000$; a calculé la marge $130\,000 - 124\,000 = 6\,000$.

- **C3 Cohérence** : a distingué les mètres carrés, les sacs et les francs ; a conclu qu'il faut au moins 29 sacs et au plus 31 ; a jugé plausible une aire d'environ $1\,500\text{ m}^2$ pour une parcelle rizicole ; a comparé 124 000 FCFA à l'enveloppe de 130 000 FCFA ; a formulé une réponse affirmative assortie de la marge disponible ; a donné au comité un montant sur lequel il peut s'engager.

Situation 6 — Les forages de la piste

- **C1 Pertinence** : a repéré les trois points d'eau sur une même droite graduée ; a traduit « à moins de 4 km de P » par une condition de distance ; a reconnu que la zone est un intervalle de centre 6 et de rayon 4 ; a choisi de tester chaque forage séparément ; a compris que la décision porte sur les forages et non sur le puits ; a écarté la longueur totale de la piste et le rythme d'abreuvement du troupeau.
- **C2 Outils** : a écrit $|x - 6| < 4$; a obtenu $6 - 4 = 2$; a obtenu $6 + 4 = 10$; a écrit la zone sous la forme $]2; 10[$; a calculé $|3 - 6| = 3$; a calculé $|11 - 6| = 5$.
- **C3 Cohérence** : a exprimé positions et distances en kilomètres ; a comparé chacune des deux distances au seuil de 4 km ; a conclu à l'appartenance du forage A et à l'exclusion du forage B ; a contrôlé la cohérence en plaçant les trois points sur un schéma ; a formulé une décision nette sur les forages à équiper ; a précisé au chef de service de combien le forage B reste hors zone.

Fin du Chapitre 1 : Calculs dans $\mathbb{R}$.