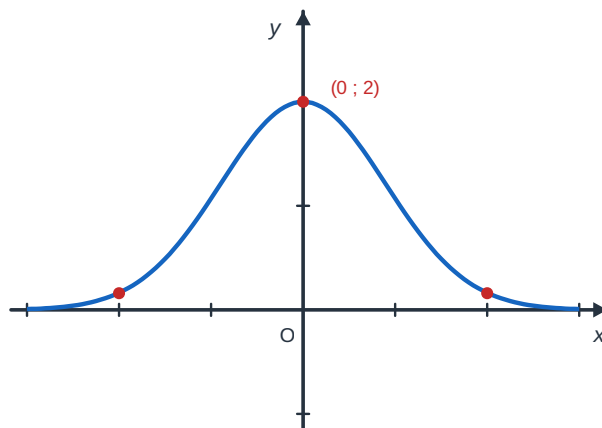


JE M'ÉCHAUFFE — Calcul mental

Echauffe-toi avant d'entrer dans le chapitre. Réponds de tête ; les réponses sont en bas.

1.	Soit $f(x) = 2x - 1$. Calcule $f(0)$, $f(3)$ et l'antécédent de 5.	5.	Soit $f(x) = x - 3$ et $g(x) = x^2$. Calcule $g(f(2))$ et $f(g(2))$.
2.	Soit $f(x) = x^2$. Donne les antécédents de 9, puis de 0.	6.	Vrai ou faux : « $a^2 = b^2$ entraîne $a = b$ ».
3.	Résous $2x - 1 = 7$, puis $3x + 6 = 0$.	7.	Résous $y = 3x + 6$ d'inconnue x .
4.	Combien de solutions ont $x^2 = 4$? $x^2 = 0$? $x^2 = -1$?	8.	Le point $(3 ; 5)$ et le point $(5 ; 3)$ sont-ils symétriques par rapport à la droite $y = x$?

Corrigés : ** 1) 5, antécédent de 5 : $x = 3$; 2) $\{-3 ; 3\}$ et $\{0\}$; 3) $x = 4$; $x = -2$; 4) deux ; une ; aucune ; 5) 8 ; 6) faux ; 7) 2 et -2 ; 8) oui.



Une **application** associe à chaque élément d'un ensemble de départ **un seul** élément d'un ensemble d'arrivée. La définition paraît anodine, presque une formalité. Elle cache pourtant une question que tu as déjà rencontrée sans la nommer : quand on connaît le résultat, peut-on remonter à ce qui l'a produit ?

Prends un exemple. Le prix à payer pour x sacs de mil se calcule sans ambiguïté : à chaque nombre de sacs correspond un prix et un seul. Mais la question inverse, « quel nombre de sacs correspond à cette somme ? », n'a pas toujours de réponse, et quand elle en a une, elle peut en avoir plusieurs. Tout dépend de la correspondance de départ. Certaines n'atteignent pas toutes les cibles : aucune somme impaire ne

correspond à un nombre entier de sacs quand le sac coûte un prix pair. D'autres envoient deux départs différents sur la même arrivée : un carré de côté 3 et un carré de côté -3 ont la même aire, si bien que l'aire ne suffit pas à retrouver le côté.

Ces deux défauts possibles portent chacun un nom, et leur absence aussi. Une application qui n'envoie jamais deux éléments au même endroit est dite **injective** ; une application qui atteint toutes les cibles est dite **surjective** ; celle qui a les deux qualités à la fois est **bijective**, et c'est exactement celle qu'on peut « défaire ». Reconnaître ces trois situations, ce n'est pas apprendre trois mots savants : c'est répondre à une question centrale de l'analyse, **combien de solutions a l'équation $f(x) = \lambda$** ? Aucune, une seule, ou plusieurs, selon la nature de f .

Ce chapitre introduit donc trois mots-clés, **injective**, **surjective**, **bijective**, puis l'idée d'**application réciproque** : quand une application est bijective, la correspondance inverse existe et se calcule. On apprend enfin à **composer** deux applications, c'est-à-dire à les enchaîner comme on enchaîne deux machines d'un atelier. Ces notions, étudiées ici sur des exemples et non sous forme de théorie, reviendront toute l'année : fonctions numériques, dérivation, transformations du plan.

SOMMAIRE

Sommaire du chapitre :

Leçon 1 : Applications injective, surjective, bijective

Leçon 2 : L'équation $f(x) = \lambda$

Leçon 3 : Application réciproque d'une bijection

Leçon 4 : Composition de deux applications

UN PEU D'HISTOIRE

L'idée de **fonction** met des siècles à se préciser. Pendant longtemps, une fonction se confond avec une formule : on ne conçoit pas qu'une correspondance puisse exister sans expression algébrique pour la décrire. Au XIX^e siècle, le mathématicien allemand **Dirichlet** rompt avec cette habitude et donne une définition moderne : une correspondance qui, à chaque valeur de départ, associe **une seule** valeur d'arrivée, peu importe la façon dont on la décrit. Ce déplacement du regard, de la formule vers la correspondance, est l'acte de naissance de la notion d'application.

Le vocabulaire que tu vas apprendre est plus récent encore. Les mots **injection**, **surjection** et **bijection** sont fixés au XX^e siècle, notamment par le groupe de mathématiciens français réunis sous le nom collectif de **Bourbaki**, qui entreprend de réécrire toutes les mathématiques dans le langage des ensembles. Ces trois mots ne créent aucune mathématique nouvelle : ils nomment avec précision des situations que les mathématiciens rencontraient depuis toujours, et c'est justement pour cela qu'ils sont utiles.

Ces mots décrivent d'ailleurs des situations très concrètes. Attribuer un **numéro de dossard** unique à chaque coureur d'une course à Ouagadougou, associer à chaque élève un **numéro matricule**, donner à chaque abonné un numéro de téléphone, convertir des **francs CFA** en une autre monnaie, coder un message avant de l'envoyer : ce sont des applications, souvent **bijectives**, c'est-à-dire des correspondances « une pour une » que l'on peut inverser. Le mot inverser est ici capital : un code qu'on ne saurait pas décoder ne servirait à rien, et une liste de matricules qui donnerait le même numéro à deux élèves serait inutilisable. Le vocabulaire de ce chapitre sert donc bien au-delà des mathématiques : informatique, cryptographie, gestion des inscriptions, commerce.

CE QUE TU DOIS DÉJÀ SAVOIR

Prérequis. - **P1.** Soit $f(x) = 3x - 2$. Calcule $f(1)$ et l'antécédent de 7.

- **P2.** Soit $f(x) = x^2$. Donne l'ensemble des antécédents de 16, puis de -4 .
- **P3.** Résous, d'inconnue x : $y = 2x + 1$, puis $y = \frac{x - 3}{4}$.
- **P4.** Le point $(3; 5)$ et le point $(5; 3)$ sont-ils symétriques par rapport à la droite $y = x$? Et $(2; 7)$ et $(7; 2)$?
- **P5.** Une fonction affine $f(x) = ax + b$ (avec $a \neq 0$) est-elle strictement monotone ? Justifie selon le signe de a .

RAPPEL — Image et antécédent.

Pour une application f , l'**image** de a est $f(a)$. Un **antécédent** de b est un nombre x tel que $f(x) = b$. Un élément de l'ensemble de départ a **toujours exactement une** image ; en revanche, un élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir 0, 1 ou plusieurs antécédents. Toute la différence entre les trois mots du chapitre tient dans ce nombre d'antécédents.

RAPPEL — Résoudre $f(x) = \lambda$.

Résoudre l'équation $f(x) = \lambda$, c'est chercher **tous les antécédents** de λ par f . Graphiquement, ce sont les abscisses des points d'intersection de la courbe de f avec la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

RAPPEL — Fonction affine.

$f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$ est **strictement croissante** si $a > 0$, **strictement décroissante** si $a < 0$. Une fonction strictement monotone ne prend jamais deux fois la même valeur.

RAPPEL — Ensemble de définition.

L'ensemble de définition d'une fonction est l'ensemble des réels pour lesquels le calcul est possible. Deux interdits reviennent sans cesse : on ne divise pas par 0, donc un dénominateur doit être non nul ; on ne prend pas la racine carrée d'un nombre négatif, donc l'expression sous le radical doit être positive ou nulle. Ce rappel servira dès la première leçon, car une correspondance n'est une application que si le calcul est possible pour **tous** les éléments de l'ensemble de départ annoncé.

RAPPEL — Symétrie par rapport à la droite $y = x$.

Dans un repère **orthonormé**, le symétrique du point $M(a; b)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ est le point $M'(b; a)$: on échange l'abscisse et l'ordonnée. Les points de la droite elle-même, ceux dont les deux coordonnées sont égales, sont leurs propres symétriques.

OBJECTIFS D'APPRENTISSAGE

Savoir - Connaître les définitions d'application injective, surjective, bijective.

- Connaître les notions d'ensemble image $f(E)$ et d'ensemble des antécédents d'une partie de l'arrivée.
- Connaître le lien entre la nature de f et le nombre de solutions de $f(x) = \lambda$.
- Connaître la définition de l'application réciproque d'une bijection et de la composée $g \circ f$.

Savoir-faire théorique - Démontrer qu'une application est injective, surjective ou bijective (ou le réfuter par un contre-exemple).

- Justifier l'existence et le nombre de solutions d'une équation $f(x) = \lambda$.
- Choisir l'ensemble d'arrivée ou restreindre l'ensemble de départ pour rendre une application bijective.

Savoir-faire pratique - Déterminer la réciproque d'une bijection par une formule et la lire graphiquement.

- Déterminer la composée $g \circ f$ de deux applications ; décomposer une fonction en composée.

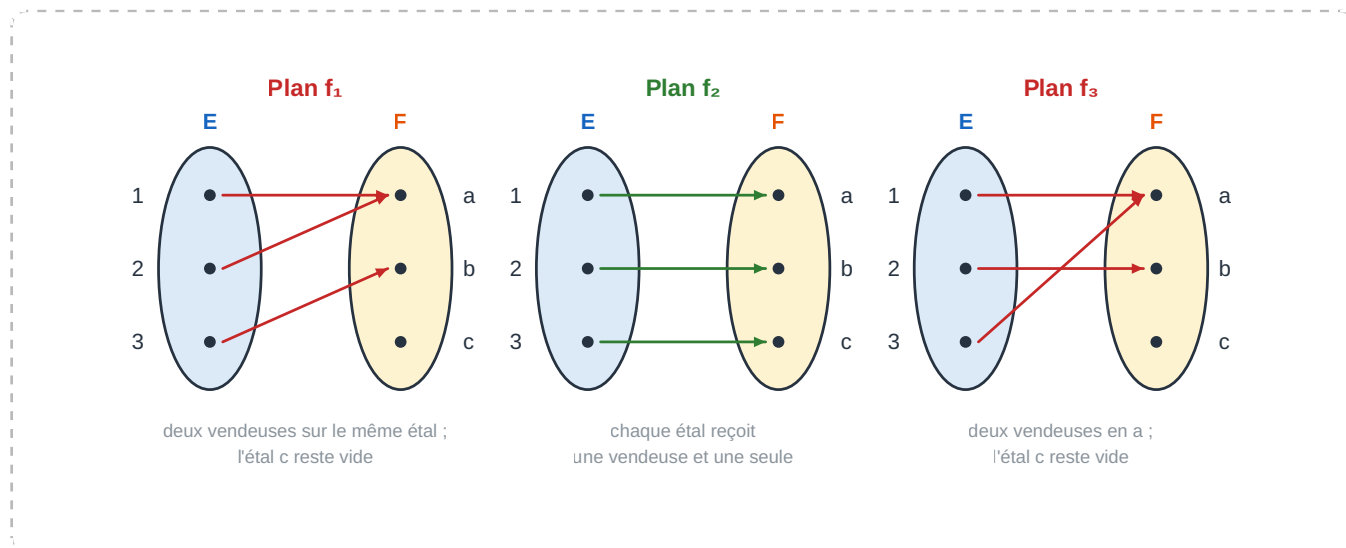
LECON 1 : Applications injective, surjective, bijective

Activité de découverte — Trois correspondances au marché de Ziniaré

Le marché de Ziniaré est réaménagé. Trois vendeuses, que nous numérotons 1, 2 et 3, doivent être placées sur trois étals, notés a , b et c . On note $E = \{1; 2; 3\}$ l'ensemble des vendeuses et $F = \{a; b; c\}$ l'ensemble des étals. Le responsable du marché hésite entre trois plans de placement.

- Plan f_1 : la vendeuse 1 va en a , la vendeuse 2 va en a , la vendeuse 3 va en b .
- Plan f_2 : la vendeuse 1 va en a , la vendeuse 2 va en b , la vendeuse 3 va en c .
- Plan f_3 : la vendeuse 1 va en a , la vendeuse 2 va en b , la vendeuse 3 va en a .

- a) Dans chacun des trois plans, chaque vendeuse reçoit-elle un étal, et un seul ? Un plan qui laisserait une vendeuse sans étal, ou qui lui en attribuerait deux, serait-il acceptable ?
- b) Pour le plan f_1 , deux vendeuses différentes se retrouvent-elles sur le même étal ? Lesquelles ? Même question pour f_2 , puis pour f_3 .
- c) Pour le plan f_2 , chaque étal reçoit-il au moins une vendeuse ? Combien exactement ? Reprends la question pour f_1 : quel étal reste vide ?
- d) Un client arrive et demande à voir la vendeuse installée en b . Dans quel plan la réponse est-elle immédiate et sans ambiguïté ? Dans quel plan la question « qui est en c ? » n'a-t-elle aucune réponse ?
- e) Laquelle des trois correspondances établit un placement « une pour une », où l'on peut aussi bien retrouver l'étal à partir de la vendeuse que la vendeuse à partir de l'étal ?



Ce que l'activité met en évidence

La question a) teste ce qui n'est pas négociable. Un plan de placement n'a de sens que si **chaque** vendeuse reçoit **exactement un** étal : ni zéro, ni deux. C'est précisément la condition qui fait d'une correspondance une **application**. Les trois plans proposés la respectent, et c'est pour cela qu'on peut les comparer ; une correspondance qui laisserait une vendeuse sans place ne serait même pas dans la discussion.

Les questions b) et c) font apparaître deux défauts bien différents, qu'il faut absolument séparer dans ton esprit. Avec le plan f_1 , deux vendeuses partagent le même étal : le défaut est **du côté du départ**, deux

éléments distincts ont la même image. Avec ce même plan, l'étal c reste vide : le défaut est cette fois **du côté de l'arrivée**, un élément d'arrivée n'a aucun antécédent. Ce sont deux problèmes indépendants, et ils portent chacun un nom : l'absence du premier défaut s'appellera l'**injectivité**, l'absence du second s'appellera la **surjectivité**.

La question **d)** montre pourquoi ces deux mots ne sont pas de simples étiquettes. Le client qui cherche la vendeuse de l'étal b pose en réalité la question de l'**antécédent** : quel élément de départ arrive ici ? Dans le plan f_3 , la question « qui est en a ? » a deux réponses, ce qui est une source de confusion ; la question « qui est en c ? » n'en a aucune. Autrement dit, chercher un antécédent, c'est résoudre une équation, et les deux accidents possibles sont toujours les mêmes : trop de solutions, ou pas de solution du tout.

Le plan f_2 échappe aux deux accidents. Chaque étal reçoit une vendeuse et une seule, si bien que la correspondance se lit dans les deux sens : de la vendeuse vers l'étal, et de l'étal vers la vendeuse. C'est cette double qualité, réunion des deux précédentes, qu'on appellera la **bijectivité**. Retiens dès maintenant l'image du plan f_2 : elle contient tout le chapitre. Une bijection, c'est un appariement parfait, sans doublon et sans place vide, donc une correspondance que l'on peut **inverser**, ce qui fera l'objet de la leçon 3.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Application. Une **application** f de E vers F est une correspondance qui, à **chaque** élément de E (ensemble de **départ**), associe **un et un seul** élément de F (ensemble d'**arrivée**). On note $f : E \rightarrow F$, et l'image de x se note $f(x)$.

Deux conditions sont donc à contrôler, et une seule ne suffit pas :

- **existence** : aucun élément de E ne doit rester sans image ;
- **unicité** : aucun élément de E ne doit avoir deux images.

Une fonction numérique f définit une application de son ensemble de définition D_f vers $\mathbb{R}$. Dire « f est une application de E vers F » suppose donc que E est inclus dans D_f , et que toutes les images tombent bien dans F .

Cette définition explique pourquoi l'ensemble de départ ne se choisit pas au hasard. La correspondance $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ n'est **pas** une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, car l'élément 2 de l'ensemble de départ n'aurait pas d'image : la condition d'existence est en défaut. Elle devient une application dès qu'on retire ce point gênant, c'est-à-dire de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ vers $\mathbb{R}$. De même, $x \mapsto \sqrt{x-1}$ n'est pas une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, mais elle en est une de $[1; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Retiens la règle : une application, ce n'est pas seulement une formule, c'est une formule **accompagnée de ses deux ensembles**.

MÉTHODE : VÉRIFIER QU'UNE CORRESPONDANCE EST BIEN UNE APPLICATION

Étape 1 : Lis l'ensemble de départ E annoncé par l'énoncé, puis repère dans la formule les **interdits de calcul** : dénominateur qui s'annule, expression négative sous un radical.

Étape 2 : Vérifie que **aucun** élément de E ne tombe sur un interdit. S'il en existe un seul, la correspondance n'est pas une application de E vers F : dis lequel, c'est la justification attendue.

Étape 3 : Vérifie que le calcul donne **un seul** résultat. Une écriture comme « $x \mapsto$ un nombre dont le carré vaut x » ne convient pas, puisqu'elle propose deux valeurs.

Étape 4 : Vérifie enfin que toutes les images tombent bien dans l'ensemble d'arrivée F annoncé.

Exemple résolu 1 : reconnaître une application

Enoncé. Dis, en justifiant, si les correspondances suivantes sont des applications : **a)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$x \mapsto 2x^2 + 1$; **b)** $g : [-4 ; 5] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x+1}$; **c)** $h : [1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x-1}$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Pour f , la formule ne comporte ni quotient ni radical : le calcul est possible pour n'importe quel réel, et il donne un seul résultat. Les deux conditions sont remplies.	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x^2 + 1$ existe et est unique : f est une application.
Pour g , il y a un dénominateur : on cherche la valeur qui l'annule, puis on regarde si elle appartient à l'ensemble de départ annoncé.	$x + 1 = 0$ donne $x = -1$, et -1 appartient bien à $[-4 ; 5]$.
Cette valeur est dans le départ, donc un élément de $[-4 ; 5]$ n'a pas d'image : la condition d'existence tombe. On donne l'élément fautif, c'est lui qui prouve la réponse.	g n'est pas une application de $[-4 ; 5]$ vers $\mathbb{R}$: -1 n'a pas d'image.
Pour h , il y a un radical : on résout l'inéquation qui rend le calcul possible, puis on la compare au départ annoncé.	$x - 1 \geq 0$ équivaut à $x \geq 1$, ce qui est exactement $[1 ; +\infty[$.
Tous les éléments du départ conviennent, et la racine carrée d'un réel positif est un nombre unique.	h est une application de $[1 ; +\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

Vérification. Pour g , il suffisait de changer l'ensemble de départ pour rétablir la situation : g est bien une application de $[-4 ; -1[\cup]-1 ; 5]$ vers $\mathbb{R}$. Une correspondance n'est donc jamais « fausse » en elle-même : c'est le couple formule et ensemble de départ qui est ou n'est pas cohérent.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Injective, surjective, bijective. Soit f une application de E vers F .

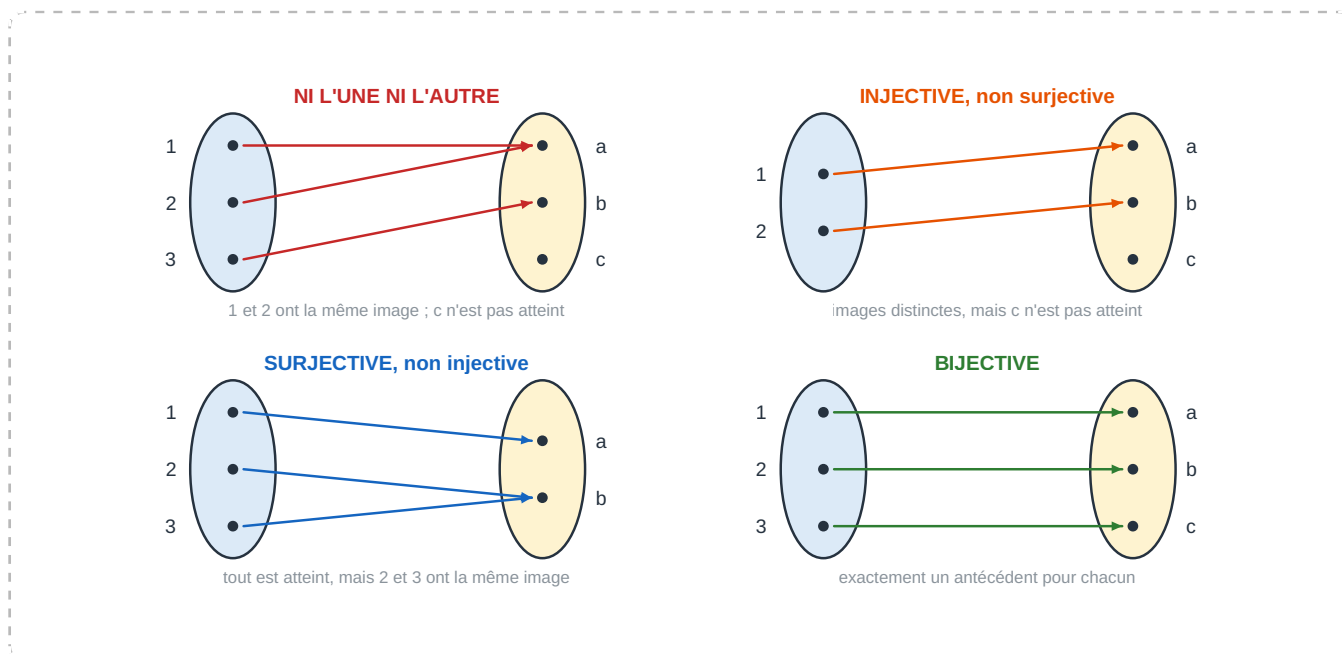
- f est **injective** lorsque deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes. On l'écrit sous la forme utilisable en démonstration :

$$f(a) = f(b) \implies a = b.$$

Autrement dit, chaque élément de F a **au plus un** antécédent.

- f est **surjective** lorsque tout élément y de F a **au moins un** antécédent, c'est-à-dire lorsque l'équation $f(x) = y$ a au moins une solution dans E , quel que soit y choisi dans F .
- f est **bijective** lorsqu'elle est à la fois injective **et** surjective : tout élément de F a alors **exactement un** antécédent.

Étymologie : « injection » (du latin *inijcere*, jeter dans : on jette E dans F sans écrasement) ; « surjection » (*sur*, au-dessus : l'arrivée est entièrement recouverte) ; « bijection » (*bi*, les deux : la correspondance fonctionne dans les deux sens).



Ces trois définitions se retiennent par une seule idée : on compte les **antécédents**. Injective veut dire « au plus un » ; surjective veut dire « au moins un » ; bijective veut dire « exactement un », ce qui est bien la réunion des deux conditions précédentes. Remarque que la définition de l'injectivité est écrite sous la forme d'une implication, $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, et non sous la forme « $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ », qui dit pourtant la même chose. Ce n'est pas un caprice : la première forme part d'une égalité, donc d'une équation que l'on sait manipuler, alors que la seconde part d'une inégalité, avec laquelle on ne peut presque rien faire. C'est la forme qui se démontre.

Retiens aussi ceci, qui est la source de la moitié des erreurs du chapitre : l'injectivité ne dépend que de E et de la formule, alors que la **surjectivité dépend de l'ensemble d'arrivée F** que l'on a choisi. Changer F ne change rien à l'injectivité, mais peut faire apparaître ou disparaître la surjectivité. C'est pourquoi un énoncé sérieux annonce toujours les deux ensembles avant de poser la question.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Ensemble image. Soit f une application de E vers F . L'ensemble des images de tous les éléments de E s'appelle l'**ensemble image** de f et se note $f(E)$:

$$f(E) = \{f(x) ; x \in E\}.$$

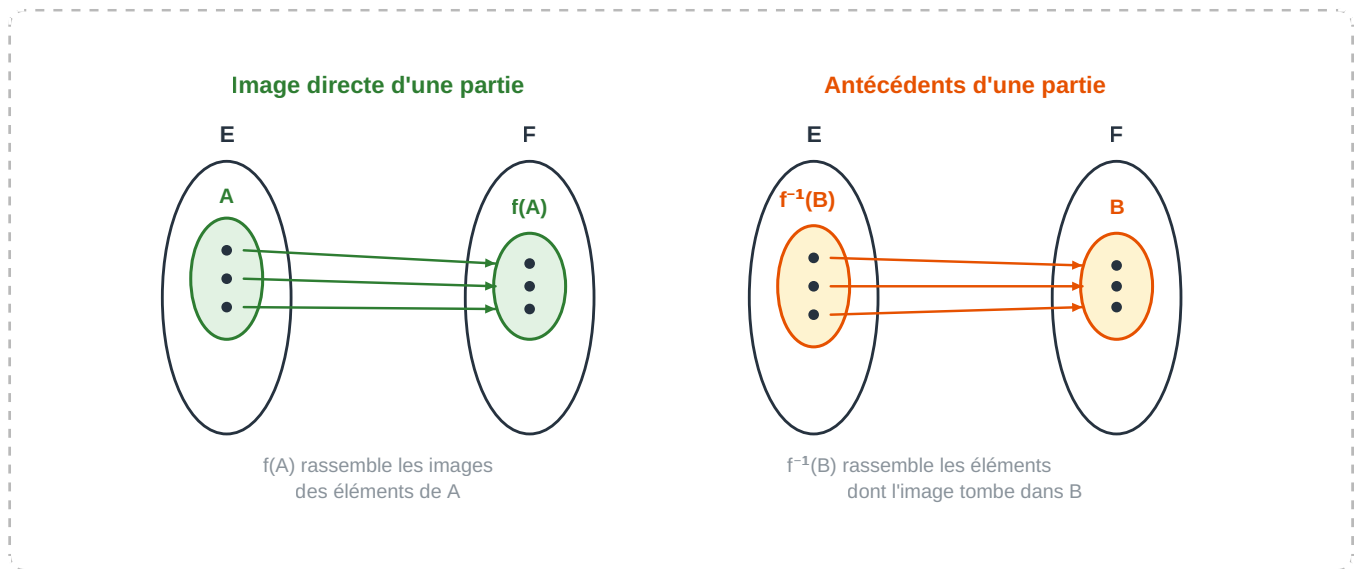
C'est la partie de F réellement atteinte par f . On a toujours $f(E) \subset F$, et :

$$f \text{ est surjective de } E \text{ vers } F \iff f(E) = F.$$

Antécédents d'une partie. Pour une partie B de F , l'ensemble des éléments de E dont l'image tombe dans B se note $f^{-1}(B)$: c'est l'ensemble des **antécédents** des éléments de B . Il peut être vide.

Cette notion d'ensemble image donne la clé d'une consigne très fréquente : « détermine B pour que f soit surjective de E vers B ». Il n'y a rien à inventer, il suffit de calculer $f(E)$ et de poser $B = f(E)$, car par construction toutes les valeurs de $f(E)$ sont atteintes et aucune autre ne l'est. Ainsi, pour $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$, l'ensemble image est $[0 ; +\infty[$: f n'est pas surjective vers $\mathbb{R}$, mais elle l'est vers $[0 ; +\infty[$. Rendre

une application surjective, ce n'est donc pas la changer, c'est **rétrécir l'arrivée jusqu'à ce qu'elle colle exactement** à ce que l'application produit.



Attention à la notation $f^{-1}(B)$: elle se lit ici « ensemble des antécédents des éléments de B », et **elle ne suppose pas que f soit bijective**. C'est une notation d'ensemble, pas le calcul d'une application réciproque. Par exemple, pour $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, on a $f^{-1}(\{9\}) = \{-3; 3\}$ et $f^{-1}(\{-4\}) = \emptyset$, alors que f n'est ni injective ni surjective. Nous retrouverons ce symbole avec un autre sens en leçon 3, et il faudra alors une bijection.

MÉTHODE : DÉMONTRER QU'UNE APPLICATION EST INJECTIVE

- Étape 1 :** Prends deux éléments a et b de l'ensemble de départ et **suppose** $f(a) = f(b)$. Ecris cette égalité avec la formule de f .
- Étape 2 :** Transforme l'égalité par calculs équivalents, dans le but d'aboutir à $a = b$. Simplification par un facteur non nul, produit en croix, mise en facteur : ce sont les outils habituels.
- Étape 3 :** Si tu y parviens quel que soit le couple choisi, l'implication $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$ est démontrée et f est injective.
- Étape 4 :** Si tu bloques, c'est souvent que l'application ne l'est pas : cherche alors un **contre-exemple**, c'est-à-dire deux nombres $a \neq b$ vérifiant $f(a) = f(b)$. Un seul contre-exemple suffit à conclure, et il doit être écrit avec ses valeurs numériques.

Exemple résolu 2 : injectivité de deux applications

Enoncé. Etudie l'injectivité de $f(x) = 3x + 2$, puis de $g(x) = x^2$, considérées comme applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Pour f , on applique la méthode : on suppose que deux éléments ont la même image et on écrit cette égalité avec la formule.	Soient a et b réels tels que $f(a) = f(b)$, c'est-à-dire $3a + 2 = 3b + 2$.
On retranche 2 aux deux membres, puis on divise par 3, qui n'est pas nul : chaque étape est une équivalence, donc rien n'est perdu.	$3a = 3b$, puis $a = b$.
L'implication cherchée est établie pour tous les couples : la définition est vérifiée.	f est injective sur $\mathbb{R}$.
Pour g , on essaie la même chose : $a^2 = b^2$ donne $a = b$ ou $a = -b$. Le « ou » interdit de conclure, et il indique où chercher un contre-exemple : chez deux nombres opposés.	$a^2 = b^2$ équivaut à $a = b$ ou $a = -b$: on ne peut pas conclure.
On écrit le contre-exemple avec des valeurs précises, et on vérifie les deux points : les nombres sont bien distincts, les images sont bien égales.	$g(2) = 4$ et $g(-2) = 4$, avec $2 \neq -2$.
Un seul contre-exemple suffit pour réfuter une propriété universelle.	g n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

Interprétation. Ce que traduit l'échec de g , c'est qu'un carré ne permet pas de retrouver le nombre de départ : connaître l'aire d'un carré ne dit pas si son côté valait 2 ou -2 . En revanche, la réussite de f tient à un fait plus général : f est une fonction affine de coefficient directeur $3 \neq 0$, donc strictement croissante, et une fonction strictement monotone ne peut pas prendre deux fois la même valeur. Toutes les applications affines non constantes sont injectives, pour cette raison.

MÉTHODE : DÉMONTRER LA SURJECTIVITÉ, PUIS LA BIJECTIVITÉ

Étape 1 : Pour la **surjectivité**, prends un élément y **quelconque** de l'ensemble d'arrivée. Ne choisis surtout pas une valeur particulière : la propriété doit valoir pour tous.

Étape 2 : Résous l'équation $f(x) = y$, d'inconnue x , en exprimant x en fonction de y .

Étape 3 : Vérifie que la solution trouvée appartient bien à l'ensemble de **départ**. Si c'est le cas pour tout y , l'application est surjective ; si certaines valeurs de y ne donnent aucune solution, elle ne l'est pas, et ces valeurs indiquent quel ensemble d'arrivée il aurait fallu prendre.

Étape 4 : Pour la **bijectivité**, deux rédactions sont acceptées : montrer séparément l'injectivité et la surjectivité, ou montrer d'un seul coup que l'équation $f(x) = y$ a **exactement une** solution pour tout y de l'arrivée. La seconde est souvent la plus rapide.

Étape 5 : Cas très utile : toute application **affine** $x \mapsto ax + b$ avec $a \neq 0$, et plus généralement toute application **strictement monotone** de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont la courbe balaie tout $\mathbb{R}$ en ordonnée, est bijective.

Exemple résolu 3 : une bijection affine

Enoncé. Montre que $f(x) = 2x - 6$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On commence par l'injectivité, en supposant l'égalité de deux images.	$2a - 6 = 2b - 6$ donne $2a = 2b$, puis $a = b$: f est injective.
Pour la surjectivité, on prend y quelconque dans l'arrivée et on résout l'équation d'inconnue x .	$2x - 6 = y$ équivaut à $2x = y + 6$, soit $x = \frac{y+6}{2}$.
Cette expression a un sens pour tout réel y , et le nombre obtenu est bien un réel : il appartient donc à l'ensemble de départ.	Pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\frac{y+6}{2} \in \mathbb{R}$: f est surjective.
Les deux propriétés étant établies, on conclut.	f est injective et surjective, donc bijective.

Vérification. Le calcul de la surjectivité a donné, pour chaque y , une seule valeur de x . On aurait donc pu conclure directement à la bijectivité sans traiter l'injectivité à part : l'équation $f(x) = y$ possède exactement une solution pour tout y . Cette solution unique, $\frac{y+6}{2}$, est déjà la formule de la réciproque que nous étudierons en leçon 3.

Exemple résolu 4 : ajuster les ensembles pour obtenir une bijection

Enoncé. Soit g l'application définie par $g(x) = x^2$. **1)** Détermine l'ensemble image $g(\mathbb{R})$ et dis si g est surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. **2)** Montre que la même formule définit une bijection de $[0 ; +\infty[$ vers $[0 ; +\infty[$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Un carré est toujours positif ou nul, et tout réel positif y est le carré de $\sqrt{y}$: l'ensemble image est donc exactement l'ensemble des réels positifs.	$g(\mathbb{R}) = [0 ; +\infty[$.
Comme $g(\mathbb{R})$ n'est pas $\mathbb{R}$ tout entier, la surjectivité vers $\mathbb{R}$ est en défaut. On désigne une valeur non atteinte : c'est la preuve.	-4 n'a pas d'antécédent, donc g n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
On change maintenant le départ pour $[0 ; +\infty[$ et on reprend l'injectivité. L'égalité $a^2 = b^2$ donne $a = b$ ou $a = -b$, mais deux nombres opposés tous les deux positifs sont forcément nuls, donc égaux.	Si $a \geq 0, b \geq 0$ et $a^2 = b^2$, alors $a = b$: g est injective sur $[0 ; +\infty[$.
Pour la surjectivité vers $[0 ; +\infty[$, on résout l'équation avec un y positif quelconque et on contrôle que la solution est bien dans le départ.	Pour $y \geq 0, x^2 = y$ et $x \geq 0$ donnent $x = \sqrt{y}$, qui appartient à $[0 ; +\infty[$.
Les deux ensembles ayant été ajustés, la conclusion tombe.	$g : [0 ; +\infty[\rightarrow [0 ; +\infty[$ est bijective.

Interprétation. Rien n'a changé dans la formule : c'est le **choix des ensembles** qui a tout changé. En rétrécissant le départ, on a supprimé les couples de nombres opposés, donc les doublons, et gagné l'injectivité ; en rétrécissant l'arrivée à l'ensemble image, on a supprimé les valeurs jamais atteintes, donc gagné la surjectivité. Retiens cette manœuvre en deux temps, car les exercices la demandent constamment sous le nom de **restriction** : restreindre le départ à un intervalle où la fonction est strictement monotone, puis prendre pour arrivée l'ensemble image.

ATTENTION !

Ne confonds pas **injective** et **surjective**. Injective se dit du côté du départ : « jamais deux fois la même image », donc au plus un antécédent. Surjective se dit du côté de l'arrivée : « toutes les cibles atteintes », donc au moins un antécédent. Les deux qualités sont indépendantes : une application peut être injective sans être surjective, surjective sans être injective, les deux, ou aucune des deux.

Retiens surtout que la **nature de f dépend des deux ensembles annoncés**, et pas seulement de la formule. L'application $x \mapsto x^2$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, mais elle l'est de $\mathbb{R}$ vers $[0 ; +\infty[$; elle n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $[0 ; +\infty[$. Une réponse du type « $x \mapsto x^2$ n'est pas bijective » sans préciser les ensembles n'a donc aucun sens.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). f est une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont on connaît la représentation graphique dans un repère. Aucune formule n'est donnée : on ne dispose que de la courbe.

Outil (la propriété que j'utilise). Résoudre l'équation $f(x) = \lambda$, c'est chercher les antécédents de λ , et ces antécédents sont les **abscisses des points d'intersection** de la courbe avec la droite horizontale d'équation $y = \lambda$. Compter les antécédents revient donc à compter des points d'intersection.

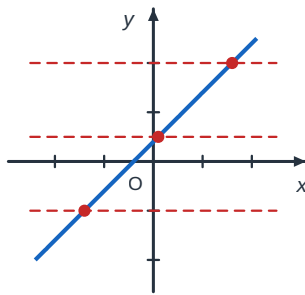
Conclusion (ce que j'en déduis). Il suffit de faire glisser mentalement une droite horizontale de haut en bas et de compter, à chaque hauteur, les points de rencontre avec la courbe. Si toute horizontale coupe la courbe **au plus une fois**, aucun λ n'a deux antécédents et f est injective. Si toute horizontale la coupe **au moins une fois**, aucun λ n'est oublié et f est surjective. Si toute horizontale la coupe **exactement une fois**, f est bijective. Ainsi la droite d'une fonction affine non constante est bijective, tandis que la parabole d'équation $y = x^2$ échoue deux fois : l'horizontale $y = 4$ la coupe en deux points, donc pas d'injectivité, et l'horizontale $y = -1$ ne la coupe pas, donc pas de surjectivité vers $\mathbb{R}$.

Rédaction type. « On sait que les solutions de $f(x) = \lambda$ sont les abscisses des points communs à la courbe et à la droite $y = \lambda$ (outil). Or, sur le graphique, la droite $y = 4$ coupe la courbe en deux points (hypothèse lue sur la figure). Donc 4 admet deux antécédents et f n'est pas injective (conclusion). »

Quel type de raisonnement ? C'est une **traduction** d'un énoncé algébrique en énoncé graphique, suivie d'une **réfutation par contre-exemple** dans le cas de la parabole. Souviens-toi de la règle de logique : pour montrer qu'une propriété est vraie pour tout λ , un dessin ne suffit pas et il faut démontrer ; pour montrer qu'elle est fausse, **un seul** contre-exemple suffit, et le graphique est un excellent moyen d'en trouver un.

Fonction affine

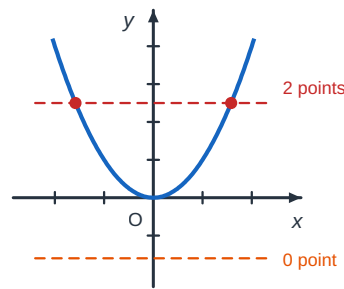
toute horizontale coupe une seule fois



1 point à chaque hauteur :
application **BIJECTIVE**

Parabole

selon la hauteur : 2 points, 1 point ou aucun



ni injective, ni surjective
vers l'ensemble des réels

ATTENTION !

Quand les ensembles sont **finis**, le simple comptage des éléments interdit certaines situations, et cela évite de longs calculs. S'il existe une application injective de E vers F , alors E ne peut pas avoir plus d'éléments que F : trois vendeuses ne peuvent pas occuper deux étals sans que deux d'entre elles se retrouvent ensemble. S'il existe une application surjective de E vers F , alors E ne peut pas en avoir moins : deux vendeuses ne rempliront jamais trois étals. Une bijection entre deux ensembles finis exige donc qu'ils aient **exactement le même nombre d'éléments**. Pense à ce comptage avant de te lancer : il répond parfois à la question en une ligne.

À TOI DE JOUER !

Exercice 1. Etudie l'injectivité de $f(x) = 5x - 1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 2. L'application $g(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est-elle surjective ? Et de $\mathbb{R}$ vers $[0 ; +\infty[$?

LECON 2 : L'équation $f(x) = \lambda$

Activité de découverte — Le canal d'irrigation de Loumbila

Sur le périmètre maraîcher de Loumbila, un canal en béton amène l'eau aux planches de salade. Vu en coupe, son fond n'est pas plat : il est creusé en forme de parabole. On repère cette coupe dans un repère dont l'origine est placée au **point le plus bas** du canal, l'axe des abscisses étant horizontal. La paroi a alors pour équation $y = x^2$, où x et y sont exprimés en mètres.

Quand l'eau coule, sa surface est horizontale : c'est une droite d'équation $y = \lambda$, où λ est la hauteur d'eau mesurée à partir du point le plus bas. Les points où la surface de l'eau touche le béton sont donc les points communs à la parabole et à cette droite.

a) Le canal est rempli sur une hauteur de 4 mètres. Résous l'équation $x^2 = 4$: combien de points de contact la surface de l'eau a-t-elle avec la paroi ? Que représentent concrètement les deux nombres trouvés ?

- b)** Le canal vient d'être vidé et il ne reste qu'un filet d'eau au fond : on prend $\lambda = 0$. Combien l'équation $x^2 = 0$ a-t-elle de solutions ? Comment interprètes-tu ce résultat sur le dessin ?
- c)** Un stagiaire écrit dans son rapport que la hauteur d'eau est de -1 mètre. Résous $x^2 = -1$. Que conclus-tu, d'abord sur l'équation, ensuite sur le rapport du stagiaire ?
- d)** Reprends les trois cas et complète la phrase : « le nombre de solutions de l'équation $x^2 = \lambda$ est égal au nombre de points d'intersection de la parabole avec la droite ... ».
- e)** Le nombre de solutions est-il le même pour toutes les valeurs de λ ? Range les valeurs de λ en trois catégories selon la réponse.

Ce que l'activité met en évidence

La première chose que met en évidence cette activité, c'est qu'une équation du type $f(x) = \lambda$ n'a pas **un** nombre de solutions : elle en a un qui **dépend de λ** . Pour la même fonction, on est passé de deux solutions à une, puis à aucune, sans rien changer d'autre que la hauteur d'eau. Voilà pourquoi la question posée en classe n'est jamais « combien de solutions ? » mais toujours « combien de solutions **selon λ** ? », et pourquoi une réponse complète comporte une discussion, cas par cas.

La deuxième idée est la traduction graphique. Résoudre $x^2 = \lambda$, c'est chercher les antécédents de λ , et ces antécédents sont exactement les abscisses des points où la droite horizontale $y = \lambda$ rencontre la courbe. La question **d)** t'a fait écrire cette correspondance ; garde-la en tête, car elle transforme un problème de calcul en un problème de lecture, souvent bien plus rapide. Faire glisser une horizontale du bas vers le haut, c'est faire varier λ , et voir le nombre de points de contact changer.

La troisième idée est le lien avec la leçon précédente, et c'est la plus importante. Pourquoi la parabole donne-t-elle deux solutions ? Parce que la fonction carré n'est pas injective : deux abscisses opposées ont la même image. Pourquoi l'équation $x^2 = -1$ n'a-t-elle aucune solution ? Parce que la fonction carré n'est pas surjective vers $\mathbb{R}$: la valeur -1 n'est jamais atteinte. Les deux accidents de la leçon 1 réapparaissent ici sous la forme de deux accidents d'équation, et ce n'est pas une coïncidence : ce sont les mêmes, vus d'un autre côté.

Enfin, remarque le rôle du contexte. Une hauteur d'eau négative n'a pas de sens physique, et l'absence de solution le confirme : la valeur $\lambda = -1$ est sous le fond du canal, l'eau n'y touche aucune paroi. Le calcul mathématique et la réalité disent la même chose, et c'est un excellent moyen de contrôler une réponse.

CE QU'IL FAUT RETENIR

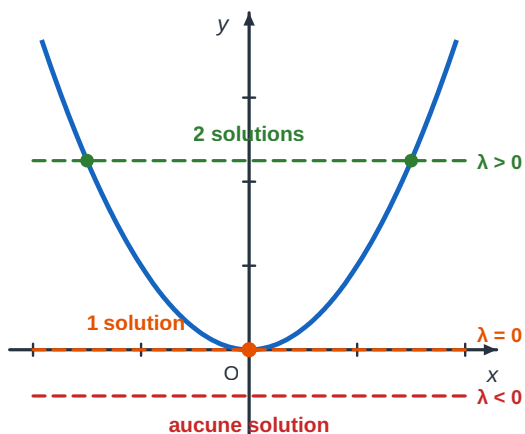
Nombre de solutions de $f(x) = \lambda$. Soit f une application de E vers F et λ un élément de F . Résoudre l'équation $f(x) = \lambda$, c'est déterminer **tous les antécédents** de λ par f . Le nombre de solutions se lit alors directement sur la nature de f :

- si f est **injective**, l'équation $f(x) = \lambda$ a **au plus une** solution ;
- si f est **surjective**, l'équation $f(x) = \lambda$ a **au moins une** solution, et ceci pour tout λ de F ;
- si f est **bijjective**, l'équation $f(x) = \lambda$ a **exactement une** solution, et ceci pour tout λ de F .

Traduction graphique. Le nombre de solutions de $f(x) = \lambda$ est le nombre de **points d'intersection** de la courbe de f avec la droite horizontale d'équation $y = \lambda$.

Ce tableau à trois entrées n'est pas une nouvelle propriété à mémoriser : c'est la traduction mot pour mot des définitions de la leçon 1. « Au plus un antécédent » et « au plus une solution » sont la même phrase, une fois qu'on a compris qu'un antécédent de λ **est** une solution de $f(x) = \lambda$. Tu peux donc reconstruire les trois lignes à tout moment, sans les apprendre, à condition de te rappeler que injectif veut dire au plus un, surjectif au moins un, bijectif exactement un.

Le niveau de l'eau dans le canal : $x^2 = \lambda$

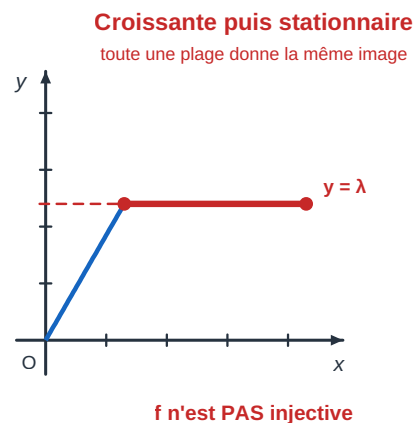
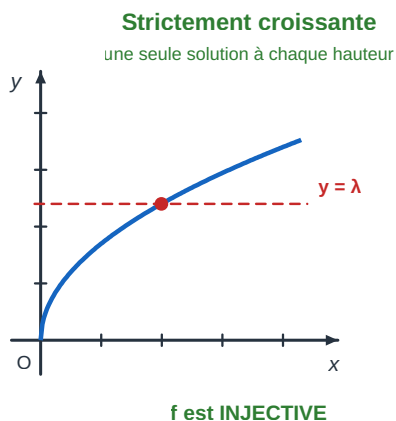


CE QU'IL FAUT RETENIR

Monotonie et nombre de solutions. Si f est **strictement monotone** sur un intervalle I , alors f est injective sur I : l'équation $f(x) = \lambda$ a **au plus une** solution.

Pour discuter une équation avec une fonction non monotone, on découpe donc $\mathbb{R}$ (ou l'intervalle d'étude) en **intervalles de monotonie**, on compte les solutions sur chacun, puis on additionne. Le tableau de variation donne directement ce découpage ainsi que les valeurs atteintes sur chaque morceau.

La raison en est simple et mérite d'être dite. Sur un intervalle où f est strictement croissante, $a < b$ entraîne $f(a) < f(b)$, donc $f(a)$ et $f(b)$ ne peuvent jamais être égaux : deux abscisses distinctes ont bien deux images distinctes. Le même argument vaut pour la décroissance stricte, avec l'inégalité renversée. Une fonction strictement monotone ne repasse jamais par la même valeur, et c'est exactement ce que dit l'injectivité.



La figure ci-dessus oppose les deux comportements. A gauche, la courbe monte sans jamais s'arrêter : chaque horizontale la rencontre une seule fois, l'application est injective. A droite, la courbe monte puis se stabilise : sur tout le palier, une infinité d'abscisses donnent la même image, et l'équation $f(x) = \lambda$ a une infinité de solutions pour cette hauteur précise. Une fonction seulement croissante, au sens large, ne suffit donc pas : c'est bien la croissance **stricte** qui est exigée.

MÉTHODE : DISCUTER LE NOMBRE DE SOLUTIONS SELON λ

Étape 1 : Détermine la nature de f , ou à défaut lis son tableau de variation ou sa courbe. C'est cette étape qui commande toutes les autres.

Étape 2 : Repère les valeurs de λ qui séparent les cas : extremums de la fonction, valeurs limites atteintes aux bornes. Ce sont les hauteurs où le nombre de points d'intersection change.

Étape 3 : Trace, réellement ou mentalement, la droite $y = \lambda$ et fais-la glisser du bas vers le haut. Compte les intersections dans chaque cas.

Étape 4 : Rédige la discussion cas par cas, en écrivant clairement les intervalles de λ et le nombre de solutions correspondant. N'oublie jamais le cas frontière, celui où la droite est tangente ou passe par un extremum.

Étape 5 : Contrôle : la somme des cas doit couvrir tout l'ensemble d'arrivée, sans trou ni recouvrement.

Exemple résolu 1 : le cas de la parabole

Enoncé. Discute, selon le réel λ , le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = \lambda$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
La fonction carré a pour minimum 0, atteint en $x = 0$. C'est cette valeur qui va séparer les cas : on discute donc selon la position de λ par rapport à 0.	Le minimum de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ vaut 0.
Si λ est strictement négatif, la droite $y = \lambda$ passe sous le sommet de la parabole, qui est tout entière au-dessus de l'axe des abscisses : elles ne se rencontrent pas.	Pour $\lambda < 0$: aucune intersection, donc 0 solution.
Si λ est nul, la droite est l'axe des abscisses, qui touche la parabole en son seul sommet.	Pour $\lambda = 0$: 1 solution, $x = 0$.
Si λ est strictement positif, la droite coupe les deux branches de la parabole, en deux points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.	Pour $\lambda > 0$: 2 solutions, $x = \sqrt{\lambda}$ et $x = -\sqrt{\lambda}$.

Vérification. Les trois cas couvrent bien tout $\mathbb{R}$, sans trou ni chevauchement : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$. Le résultat est de plus cohérent avec la leçon 1 : l'existence de λ sans solution confirme que la fonction carré n'est pas surjective vers $\mathbb{R}$, et l'existence de λ à deux solutions confirme qu'elle n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.

Exemple résolu 2 : le cas d'une fonction affine

Énoncé. Combien l'équation $2x - 1 = \lambda$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$, selon la valeur du réel λ ?

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On identifie d'abord la nature de la fonction : elle est affine, de coefficient directeur 2, donc non constante, donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.	$f(x) = 2x - 1$ est affine avec $a = 2 \neq 0$: f est bijective.
La bijectivité annonce le résultat avant tout calcul : exactement une solution pour chaque λ . On le confirme en résolvant.	$2x - 1 = \lambda$ équivaut à $2x = \lambda + 1$, soit $x = \frac{\lambda + 1}{2}$.
L'expression obtenue a un sens pour tout réel λ et fournit une valeur unique : il n'y a donc pas de cas à distinguer.	Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$: une seule solution.

Interprétation. Il n'y a ici aucune discussion à mener, et c'est précisément ce que signifie la bijectivité : la droite représentative n'a ni palier ni demi-tour, si bien que toute horizontale la traverse une fois et une seule. Compare avec l'exemple précédent : le changement complet de comportement ne vient pas de la difficulté des calculs, mais de la nature de la fonction.

Exemple résolu 3 : discuter à partir d'un tableau de variation

Énoncé. Une fonction f , définie sur $\mathbb{R}$, est strictement décroissante sur $] -\infty ; 1]$ où elle passe de valeurs aussi grandes que l'on veut jusqu'à -2 , puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ où elle repart de -2 vers des valeurs aussi grandes que l'on veut. Discute, selon λ , le nombre de solutions de $f(x) = \lambda$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On repère la valeur qui sépare les cas : c'est le minimum de la fonction, atteint au changement de sens de variation.	Le minimum de f vaut -2, atteint en $x = 1$.
Sous ce minimum, la droite $y = \lambda$ passe entièrement au-dessous de la courbe : elle ne peut rencontrer aucune des deux branches.	Pour $\lambda < -2$: 0 solution.
A la hauteur du minimum, la droite touche la courbe au seul point le plus bas, qui appartient aux deux branches à la fois.	Pour $\lambda = -2$: 1 solution, $x = 1$.
Au-dessus du minimum, chaque branche est strictement monotone et balaie toutes les valeurs de -2 jusqu'à des valeurs arbitrairement grandes : chacune fournit une solution et une seule.	Pour $\lambda > -2$: une solution dans $] -\infty ; 1[$ et une dans $] 1 ; +\infty[$, soit 2 solutions.

Vérification. On peut contrôler la cohérence de la discussion sur un exemple concret ayant ce tableau de variation, par exemple $f(x) = (x - 1)^2 - 2$. Pour $\lambda = -1$, l'équation $(x - 1)^2 = 1$ donne $x = 0$ et $x = 2$, soit bien deux solutions encadrant 1. Pour $\lambda = -3$, l'équation $(x - 1)^2 = -1$ n'a effectivement aucune solution. La discussion menée sur le seul tableau de variation est confirmée par le calcul.

ATTENTION !

« L'équation $f(x) = \lambda$ a une solution » ne signifie **pas** « elle en a une seule ». En français courant, dire qu'on a une solution laisse entendre qu'il n'y en a pas d'autre ; en mathématiques, cela veut seulement dire qu'il en existe au moins une. Précise donc toujours **combien** de solutions et **pour quelles valeurs de λ** .

Deuxième piège : ne conclus jamais du nombre de solutions d'un cas particulier à la nature de f . Le fait que $x^2 = 4$ ait deux solutions prouve que la fonction carré n'est pas injective, parce qu'un contre-exemple suffit à réfuter. Mais le fait que $x^2 = 0$ ait une solution unique ne prouve rien du tout : pour établir l'injectivité, il faut le démontrer pour **tous** les λ , pas pour un seul.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). f est strictement croissante sur un intervalle I , et λ est un réel fixé.

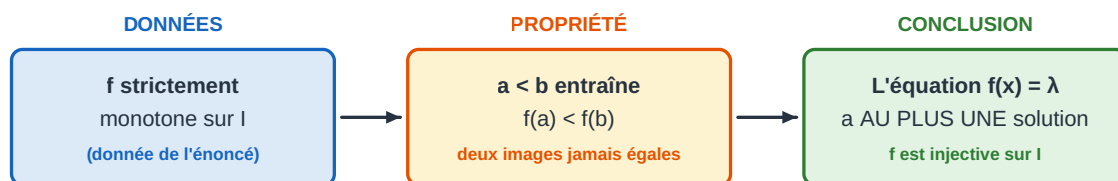
Outil (la propriété que j'utilise). La définition de la stricte croissance : pour tous réels a et b de I , si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$. J'utilise aussi le fait qu'entre deux réels distincts, l'un est nécessairement plus petit que l'autre.

Conclusion (ce que j'en déduis). Supposons que l'équation $f(x) = \lambda$ possède deux solutions distinctes a et b dans I . L'une des deux est la plus petite, disons $a < b$. La stricte croissance donne alors $f(a) < f(b)$. Mais a et b étant tous deux solutions, on a $f(a) = \lambda$ et $f(b) = \lambda$, donc $f(a) = f(b)$. On aboutit à $\lambda < \lambda$, ce qui est impossible. L'hypothèse de départ était donc fausse : l'équation ne peut pas avoir deux solutions distinctes dans I . Elle en a au plus une, autrement dit f est injective sur I .

Rédaction type. « On sait que f est strictement croissante sur I (hypothèse). Or, si a et b étaient deux solutions distinctes, avec par exemple $a < b$, on aurait à la fois $f(a) < f(b)$ par croissance stricte et $f(a) = f(b) = \lambda$ car ce sont des solutions, ce qui est contradictoire (outil). Donc $f(x) = \lambda$ admet au plus une solution sur I (conclusion). »

Quel type de raisonnement ? C'est un raisonnement **par l'absurde** : on suppose le contraire de ce qu'on veut établir, ici l'existence de deux solutions, et l'on aboutit à une impossibilité. Remarque bien qu'on obtient seulement « au plus une » solution, et pas « exactement une » : la stricte croissance interdit les doublons, mais elle ne garantit pas à elle seule que la valeur λ soit atteinte. Pour passer de au plus une à exactement une, il faudrait en plus la surjectivité, c'est-à-dire savoir que la fonction balaye bien toutes les valeurs voulues.

Déductogramme.



Déductogramme : de la stricte monotonie au nombre de solutions

À TOI DE JOUER !

Exercice 3. Discute, selon λ , le nombre de solutions de $3x + 2 = \lambda$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $f(x) = x^2 - 4$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Combien l'équation $f(x) = \lambda$ a-t-elle de solutions pour $\lambda = -4$? $\lambda = 5$? $\lambda = -5$?

LECON 3 : Application réciproque d'une bijection

Activité de découverte — La facture du transporteur de Yako

Un transporteur de Yako charge les sacs d'arachides des producteurs et les conduit au chef-lieu. Son barème est affiché sur la porte du camion : 8 mille francs par sac transporté, plus 15 mille francs de forfait pour le déplacement du camion, quel que soit le chargement. Pour x sacs, la facture, exprimée en **milliers de francs**, est donc :

$$f(x) = 8x + 15.$$

- a) Un producteur fait transporter 2 sacs. Quelle est sa facture ? Détaille les deux opérations que le transporteur effectue, dans l'ordre.
- b) Un autre producteur a payé 31 mille francs mais a perdu son reçu et ne se souvient plus du nombre de sacs. Quelles opérations dois-tu faire sur 31 pour retrouver ce nombre ? Dans quel ordre ?
- c) Compare l'ordre des opérations de la question a) et celui de la question b). Que remarques-tu, à la fois sur la nature des opérations et sur leur ordre ?
- d) Ecris la formule de la « machine inverse » qui, à partir d'une facture y , redonne le nombre de sacs x .
- e) Le transporteur pourrait-il présenter deux factures identiques pour deux nombres de sacs différents ? Y a-t-il des montants qui ne peuvent correspondre à aucune facture ? En quoi ces deux réponses rendent-elles la question b) possible ?

Ce que l'activité met en évidence

La question b) est le cœur de la leçon. On ne demande plus de calculer une image, mais de **remonter** de l'image à son antécédent. Et l'on découvre que cette remontée n'est pas un calcul mystérieux : elle consiste à défaire les opérations une à une, en prenant chaque fois l'opération contraire. Le transporteur multiplie puis ajoute ; pour revenir, on retranche puis on divise.

La question c) attire l'attention sur un détail qui n'en est pas un : l'ordre s'inverse. Le transporteur multiplie **d'abord**, ajoute **ensuite** ; pour défaire, on retranche **d'abord**, on divise **ensuite**. C'est l'ordre de l'habillage et du déshabillage : la dernière opération faite est la première défaite. Cette remarque servira encore en leçon 4, où elle prendra la forme d'une égalité entre composées.

La question e) est celle qui autorise tout le reste, et c'est pour cela qu'elle est posée en dernier. Pour que la remontée fonctionne toujours et sans ambiguïté, il faut deux choses. D'abord, que deux nombres de sacs différents ne donnent jamais la même facture, sinon la question « combien de sacs ? » aurait deux réponses : c'est l'**injectivité**. Ensuite, que tout montant considéré corresponde effectivement à une facture possible, sinon la question n'aurait aucune réponse : c'est la **surjectivité**. Réunies, ces deux conditions forment la **bijektivité**, et c'est très exactement la condition d'existence de ce que nous allons appeler l'**application réciproque**.

Retiens donc l'ordre logique, car les exercices l'exigent dans cet ordre : on démontre d'abord que f est bijective, et **seulement ensuite** on calcule sa réciproque. Ecrire une formule de réciproque sans avoir justifié la bijectivité, c'est calculer quelque chose dont on n'a pas prouvé l'existence.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Application réciproque. Soit f une **bijection** de E vers F . Chaque élément y de F a alors un antécédent et un seul. L'application qui, à chaque y de F , associe cet unique antécédent s'appelle l'**application réciproque** de f ; on la note f^{-1} , et elle va de F vers E :

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

Elle vérifie, et c'est sa propriété caractéristique :

$$f^{-1}(f(x)) = x \text{ pour tout } x \in E, \quad f(f^{-1}(y)) = y \text{ pour tout } y \in F.$$

Seule une bijection admet une application réciproque. De plus, f^{-1} est elle-même une bijection de F vers E , et sa réciproque est f .

Cette équivalence $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$ est la définition tout entière, et elle mérite d'être lue lentement. Elle dit que les deux applications décrivent la **même** correspondance, simplement parcourue en sens contraire : le couple $(x ; y)$ est vu par f comme « y est l'image de x » et par f^{-1} comme « x est l'image de y ». Rien n'est ajouté, rien n'est perdu ; on a seulement échangé le rôle du départ et celui de l'arrivée. C'est pourquoi la réciproque de la réciproque redonne f .

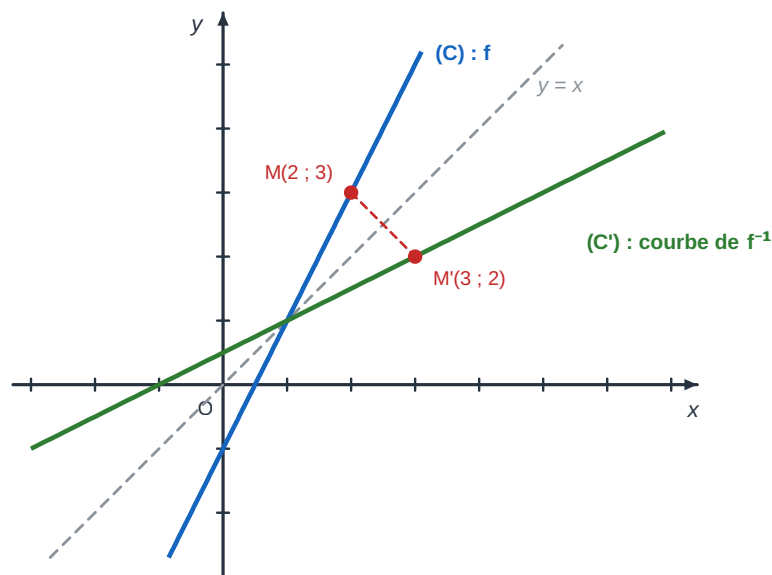
On comprend aussi pourquoi la bijectivité est indispensable, et pas seulement souhaitable. Sans injectivité, un y aurait plusieurs antécédents et $f^{-1}(y)$ ne serait pas défini de façon unique : la correspondance inverse ne serait pas une application, faute d'unicité. Sans surjectivité, un y n'aurait aucun antécédent et $f^{-1}(y)$ n'existerait pas : la correspondance inverse ne serait pas une application, faute d'existence. Les deux conditions d'une application, rencontrées en leçon 1, se retrouvent ici exactement.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Lecture graphique. Le plan est muni d'un repère **orthonormé**. Si f est une bijection, la courbe représentative de f^{-1} est la **symétrique** de la courbe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Conséquences pratiques :

- pour construire la courbe de f^{-1} , il suffit de replier la figure le long de la droite $y = x$, ou de reporter point par point les symétriques ;
- les points communs aux deux courbes qui se trouvent sur la droite $y = x$ sont les solutions de $f(x) = x$;
- la précision du tracé exige que le repère soit **orthonormé** : dans un repère quelconque, la symétrie n'est plus celle qu'on voit.



Les deux courbes se correspondent par la symétrie d'axe $y = x$

MÉTHODE : DÉTERMINER LA RÉCIPROQUE PAR UNE FORMULE

Étape 1 : Justifie d'abord la **bijektivité** de f de E vers F . Sans cette étape, la suite n'a pas de sens.

Étape 2 : Ecris $y = f(x)$, en considérant y comme une donnée et x comme l'inconnue.

Étape 3 : Résous cette équation d'inconnue x : isole x en défaisant les opérations dans l'ordre inverse de celui où elles ont été faites.

Étape 4 : La formule obtenue, $x = \dots$, est celle de f^{-1} appliquée à y . On renomme ensuite la variable pour écrire $f^{-1}(x)$, ce qui est une simple question d'habitude d'écriture.

Étape 5 : Précise l'ensemble de définition de f^{-1} : c'est l'ensemble d'**arrivée** de f .

Étape 6 : **Vérifie** en calculant $f^{-1}(f(a))$ pour une valeur numérique a de ton choix : tu dois retomber sur a .

Exemple résolu 1 : réciproque d'une application affine

Enoncé. Montre que $f(x) = 8x + 15$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, puis détermine f^{-1} .

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On établit l'injectivité en supposant deux images égales, puis en simplifiant.	$8a + 15 = 8b + 15$ donne $8a = 8b$, puis $a = b$: f est injective.
Pour la surjectivité, on prend y quelconque et on résout l'équation d'inconnue x . Ce calcul servira deux fois : il prouve la surjectivité et il donne la formule cherchée.	$y = 8x + 15$ donne $8x = y - 15$, soit $x = \frac{y - 15}{8}$.
Cette solution existe pour tout réel y et elle est unique : la surjectivité est acquise, donc la bijectivité aussi.	Pour tout $y \in \mathbb{R}$ il existe un unique x : f est bijective.
On renomme la variable pour présenter la réciproque sous sa forme habituelle, en x .	$f^{-1}(x) = \frac{x - 15}{8}$, définie sur $\mathbb{R}$.
On vérifie sur une valeur numérique en faisant l'aller puis le retour.	$f(1) = 23$ et $f^{-1}(23) = \frac{23 - 15}{8} = 1 \checkmark$

Interprétation. On retrouve exactement le barème de l'activité : pour retrouver le nombre de sacs à partir d'une facture, on retranche le forfait de 15, puis on divise par le prix unitaire 8. La formule $\frac{x - 15}{8}$ n'est donc pas un résultat abstrait, c'est la traduction algébrique du raisonnement que ferait n'importe quel producteur au marché. Remarque au passage que les opérations apparaissent bien dans l'ordre inverse de celles de f .

MÉTHODE : RÉCIPROQUE D'UNE APPLICATION HOMOGRAPHIQUE

Étape 1 : Ecris $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, puis **chasse le dénominateur** en multipliant les deux membres par $cx + d$, qui est non nul par hypothèse sur l'ensemble de départ.

Étape 2 : Développe, puis regroupe d'un même côté **tous** les termes contenant x , et de l'autre tous ceux qui n'en contiennent pas.

Étape 3 : Mets x en facteur, puis divise par le facteur obtenu, en n'oubliant pas de dire pour quelle valeur de y ce facteur s'annule : cette valeur est précisément celle qui n'a pas d'antécédent.

Étape 4 : Conclut en donnant f^{-1} et son ensemble de définition, qui est l'ensemble d'arrivée de f , c'est-à-dire $\mathbb{R}$ privé de la valeur trouvée à l'étape 3.

Exemple résolu 2 : réciproque d'une application homographique

Enoncé. Soit f l'application définie par $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$, de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Détermine f^{-1} .

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On pose $y = f(x)$ et l'on chasse le dénominateur, licite car $x \neq 1$ donc $x - 1 \neq 0$.	$y = \frac{x+2}{x-1}$ donne $y(x-1) = x+2$.
On développe, puis on rassemble à gauche les termes en x et à droite les autres.	$xy - y = x + 2$, puis $xy - x = y + 2$.
On met x en facteur : c'est l'étape décisive, celle qui permet d'isoler l'inconnue.	$x(y-1) = y+2$.
On divise par $y-1$, en signalant la valeur interdite. La valeur $y=1$ est celle qui n'a pas d'antécédent, ce qui justifie l'ensemble d'arrivée annoncé.	Pour $y \neq 1$: $x = \frac{y+2}{y-1}$.
On renomme la variable et on précise l'ensemble de définition.	$f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-1}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Vérification. On constate que f^{-1} et f ont la même formule et les mêmes ensembles : f est sa **propre réciproque**, ce qu'on appelle une **involution**. Contrôlons sur un nombre : $f(3) = \frac{5}{2}$, puis

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5/2+2}{5/2-1} = \frac{9/2}{3/2} = 3. \text{ On revient bien au point de départ, ce qui confirme le résultat.}$$

Exemple résolu 3 : restreindre pour pouvoir inverser

Enoncé. L'application $g(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ n'admet pas de réciproque. **1)** Explique pourquoi. **2)** Montre que g devient bijective de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$ et détermine sa réciproque.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On donne la raison précise de l'échec : deux antécédents pour une même valeur, donc pas d'unicité, donc pas d'application inverse possible.	$g(3) = g(-3) = 9$: 9 a deux antécédents, g n'est pas injective.
On ajoute la seconde raison, du côté de l'arrivée : certaines valeurs ne sont jamais atteintes.	-4 n'a aucun antécédent : g n'est pas surjective vers $\mathbb{R}$.
On restreint le départ aux réels positifs, ce qui supprime les couples de nombres opposés, et l'arrivée à l'ensemble image, ce qui supprime les valeurs non atteintes.	Sur $[0; +\infty[$: $a^2 = b^2$ avec $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donne $a = b$.
On résout l'équation avec un y positif quelconque, en ne gardant que la solution positive puisque le départ est maintenant $[0; +\infty[$.	Pour $y \geq 0$: $x^2 = y$ et $x \geq 0$ donnent $x = \sqrt{y}$, unique.
On conclut sur la bijectivité et l'on écrit la réciproque.	$g : [0; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$ est bijective, et $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Interprétation. Voilà d'où vient la fonction racine carrée : elle est, par construction, la réciproque de la fonction carré restreinte aux nombres positifs. C'est aussi la raison pour laquelle $\sqrt{x^2}$ ne vaut x que si x est positif : hors de l'intervalle de restriction, la belle égalité $g^{-1}(g(x)) = x$ cesse d'être vraie, et l'on obtient $\sqrt{(-3)^2} = 3$ et non -3 . Dans un repère orthonormé, les courbes de $x \mapsto x^2$ et de $x \mapsto \sqrt{x}$, tracées pour $x \geq 0$, sont bien symétriques par rapport à la droite $y = x$.

ATTENTION !

Ne confonds pas la **réci-proque** f^{-1} et l'**inverse** $\frac{1}{f}$. Le petit -1 placé en exposant du **nom de l'application** désigne la réci-proque ; placé en exposant d'un **nombre**, il désigne l'inverse. Pour $f(x) = 8x + 15$, on a $f^{-1}(x) = \frac{x-15}{8}$, alors que $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{8x+15}$: ces deux fonctions n'ont rien à voir, et il suffit de tester une valeur pour s'en convaincre.

Rappelle-toi enfin qu'une application **non bijective** n'a **pas** de réci-proque. La phrase « f^{-1} existe » n'est jamais gratuite : elle doit avoir été démontrée. Ecrire f^{-1} pour $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ est une faute, et pas seulement une imprécision.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). f est une bijection de E vers F , le plan est muni d'un repère orthonormé, et $M(a; b)$ est un point quelconque de la courbe de f .

Outil (la propriété que j'utilise). Deux propriétés se combinent. D'une part, la définition de la réci-proque : $f^{-1}(y) = x$ équivaut à $f(x) = y$. D'autre part, la propriété de symétrie vue en géométrie : dans un repère orthonormé, le symétrique de $M(a; b)$ par rapport à la droite d'équation $y = x$ est le point $M'(b; a)$.

Conclusion (ce que j'en déduis). Dire que $M(a; b)$ appartient à la courbe de f , c'est dire $b = f(a)$. Par définition de la réci-proque, cela équivaut à $f^{-1}(b) = a$, c'est-à-dire que le point de coordonnées $(b; a)$ appartient à la courbe de f^{-1} . Or ce point est justement le symétrique de M par rapport à la droite $y = x$. Ainsi, à chaque point de la courbe de f correspond son symétrique sur la courbe de f^{-1} , et réciproquement puisque le raisonnement se lit dans les deux sens. Les deux courbes sont donc symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Rédaction type. « On sait que $M(a; b)$ appartient à la courbe de f , c'est-à-dire $b = f(a)$ (hypothèse). Or, f étant bijective, $b = f(a)$ équivaut à $a = f^{-1}(b)$, donc le point $(b; a)$ appartient à la courbe de f^{-1} , et ce point est le symétrique de M par rapport à la droite $y = x$ (outil). Donc les deux courbes sont symétriques par rapport à cette droite (conclusion). »

Quel type de raisonnement ? C'est une **équivalence** : chaque étape se lit dans les deux sens, ce qui est indispensable ici, car il ne suffirait pas de montrer que tout point de la première courbe a son symétrique sur la seconde, il faut aussi l'inverse pour obtenir la symétrie complète. Note l'hypothèse « repère orthonormé » : ce n'est pas une formule de politesse, c'est elle qui rend la symétrie visible sur le dessin.

À TOI DE JOUER !

Exercice 5. Montre que $f(x) = 2x - 1$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et détermine f^{-1} .

Exercice 6. Soit $f(x) = \frac{x+1}{2}$. Détermine f^{-1} , puis vérifie que $f^{-1}(f(3)) = 3$.

LECON 4 : Composition de deux applications

Activité de découverte — Le jardin carré de Nouna

A Nouna, un maraîcher possède un terrain **carré** de côté x mètres. Le long de deux côtés consécutifs, il doit laisser une bande de 3 mètres de large pour le passage de la charrette. La partie réellement cultivée est donc, elle aussi, un carré, mais de côté plus petit.

- a) Le terrain mesure 5 mètres de côté. Quel est le côté du carré cultivé ? Quelle est son aire ?
- b) Reprends le calcul en deux temps, en nommant les opérations : la première fait passer du côté du terrain au côté du carré cultivé, la seconde fait passer de ce côté à l'aire. Ecris les formules $f(x)$ et $g(x)$ de ces deux opérations.
- c) Ecris une formule unique qui donne directement l'aire cultivée en fonction de x , sans passer par une étape intermédiaire. Développe le résultat.
- d) Un stagiaire fait les deux opérations dans l'autre ordre : il calcule d'abord l'aire du terrain entier, puis il en retranche 3. Ecris la formule qu'il obtient. Pour $x = 5$, trouve-t-il le même résultat que toi ?
- e) Que conclus-tu sur l'importance de l'ordre dans lequel on enchaîne deux opérations ? La formule du stagiaire a-t-elle d'ailleurs un sens dans le contexte du jardin ?

Ce que l'activité met en évidence

Ce que tu viens de faire en **b)** porte un nom : tu as **décomposé** un calcul en deux étapes élémentaires. C'est une habitude à prendre, car les fonctions rencontrées en analyse sont presque toujours obtenues en enchaînant des opérations simples, et savoir repérer l'enchaînement est ce qui permettra plus tard de les dériver ou d'étudier leurs variations.

La question **c)** fait le mouvement inverse : à partir des deux étapes, on écrit **une seule** application qui produit directement le résultat final. Cette application unique, on l'appellera la **composée** de f et de g . Remarque bien l'ordre dans lequel on l'écrit : c'est f qui agit en premier, puisque c'est elle qui traite le nombre de départ, et g qui reprend son résultat. La notation choisie par les mathématiciens, $g \circ f$, met pourtant g à gauche ; elle suit l'ordre dans lequel on lit la formule $g(f(x))$, de l'extérieur vers l'intérieur, et non l'ordre chronologique des calculs. C'est déroutant les premiers jours, et c'est la source de presque toutes les erreurs sur ce point.

La question **d)** administre la preuve par l'échec. En échangeant l'ordre, le stagiaire obtient $x^2 - 3$ au lieu de $(x - 3)^2$, c'est-à-dire 22 au lieu de 4 pour un terrain de 5 mètres : deux nombres qui n'ont rien à voir. Et sa formule ne veut d'ailleurs rien dire dans le contexte, car retrancher 3 mètres à une aire exprimée en mètres carrés est un non-sens physique. Retiens la conclusion : la composition n'est pas commutative, $g \circ f$ et $f \circ g$ sont en général deux applications **différentes**.

Une dernière remarque, qui prépare la fin de la leçon. Dans l'activité, chacune des deux opérations peut se défaire : pour revenir du côté cultivé au côté du terrain, on ajoute 3. On devine donc que si l'on sait défaire chaque étape, on saura défaire l'enchaînement complet ; mais il faudra le faire dans l'ordre inverse, comme on l'a déjà observé en leçon 3.

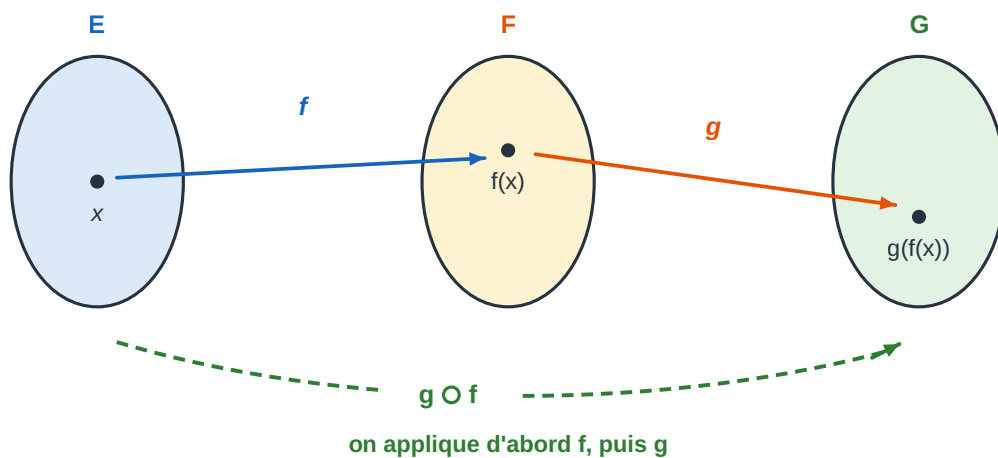
CE QU'IL FAUT RETENIR

Composée de deux applications. Soient f une application de E vers F et g une application de F vers G . La **composée** de f par g , notée $g \circ f$ et lue « g rond f », est l'application de E vers G définie par :

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

On applique **d'abord** f , puis g : dans l'écriture $g \circ f$, c'est l'application de **droite** qui agit en premier.

La composition n'est pas commutative : en général $g \circ f \neq f \circ g$, et il arrive même que l'une des deux existe sans que l'autre ait un sens.



La condition d'existence mérite d'être soulignée, car elle est souvent oubliée. Pour pouvoir calculer $g(f(x))$, il faut que $f(x)$ soit un élément que g sache traiter, c'est-à-dire que l'ensemble image de f soit contenu dans l'ensemble de départ de g . C'est exactement ce que dit le schéma en chaîne $E \rightarrow F \rightarrow G$: la sortie de la première application doit servir d'entrée à la seconde. Sur des fonctions numériques, cela se traduit par un calcul d'ensemble de définition : $g \circ f$ est définie pour les x tels que $f(x)$ existe **et** appartient à l'ensemble de définition de g . Ainsi, avec $f(x) = x - 5$ et $g(x) = \sqrt{x}$, la composée $g \circ f$ n'est définie que pour $x \geq 5$.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Application identité. L'application de E vers E qui laisse chaque élément inchangé s'appelle l'**application identité** de E , notée $\text{Id}_E : \text{Id}_E(x) = x$ pour tout x .

Lien avec la réciproque. Si f est une bijection de E vers F , alors :

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F.$$

Ces deux égalités fournissent une **méthode de contrôle** : pour prouver que deux applications f et g sont réciproques l'une de l'autre, il suffit de vérifier que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont les identités.

Composée de trois applications. On note $h \circ g \circ f$ l'application $x \mapsto h(g(f(x)))$: on applique f , puis g , puis h , toujours de la droite vers la gauche.

Ces égalités disent en langage de composée ce que la leçon 3 disait en langage d'antécédent : partir de x , aller vers $f(x)$, puis revenir, c'est ne pas avoir bougé. Elles sont surtout d'un usage très commode, car elles évitent de refaire le calcul de la réciproque : quand un énoncé propose une candidate g et demande de prouver que c'est bien f^{-1} , deux compositions suffisent, et il n'y a aucune équation à résoudre.

MÉTHODE : DÉTERMINER LA COMPOSÉE $g \circ f$

Étape 1 : Ecris la formule de f , puis celle de g , et repère bien laquelle agit en premier : dans $g \circ f$, c'est f .

Étape 2 : Dans la formule de g , **remplace partout la variable** par l'expression entière de $f(x)$. Mets cette expression entre parenthèses : c'est là que se perdent la plupart des points.

Étape 3 : Développe et réduis si l'énoncé le demande, mais garde la forme factorisée si elle est plus lisible.

Étape 4 : Détermine l'ensemble de définition de la composée : les x pour lesquels $f(x)$ existe et appartient à l'ensemble de définition de g .

Étape 5 : Contrôle sur une valeur numérique : calcule $f(a)$, puis g de ce résultat, et compare avec ce que donne ta formule finale en a .

Exemple résolu 1 : deux composées à comparer

Enoncé. On donne $f(x) = x - 3$ et $g(x) = x^2$, applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Détermine $g \circ f$ et $f \circ g$, puis compare-les.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Pour $g \circ f$, c'est f qui agit en premier : on remplace la variable de g , c'est-à-dire ce qui est élevé au carré, par l'expression $x - 3$ tout entière, entre parenthèses.	$(g \circ f)(x) = g(x - 3) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
Pour $f \circ g$, c'est g qui agit en premier : on remplace la variable de f , c'est-à-dire ce dont on retranche 3, par x^2 .	$(f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 - 3$
On compare les deux expressions obtenues : elles sont clairement différentes, et il suffit d'une valeur pour le prouver.	Pour $x = 5$: $(g \circ f)(5) = 4$ et $(f \circ g)(5) = 22$.
On conclut sur la non-commutativité, en s'appuyant sur ce contre-exemple.	$g \circ f \neq f \circ g$: l'ordre compte.

Vérification. Contrôlons $(g \circ f)(5)$ en repassant par les étapes : $f(5) = 5 - 3 = 2$, puis $g(2) = 2^2 = 4$. La formule développée donne $5^2 - 6 \times 5 + 9 = 25 - 30 + 9 = 4$. Les deux chemins concordent. Ce contrôle est à faire systématiquement, car l'oubli des parenthèses à l'étape 2 de la méthode produit ici $x^2 - 3^2$, soit 16 pour $x = 5$, et l'erreur serait aussitôt détectée.

MÉTHODE : ECRIRE UNE FONCTION COMME COMPOSÉE

Étape 1 : Regarde la formule et demande-toi quel calcul tu ferais **en premier** si tu devais l'évaluer pour un nombre donné. Ce calcul est la fonction **intérieure**, celle qui touche directement x .

Étape 2 : Le calcul qui vient ensuite, appliqué au résultat du premier, est la fonction **extérieure**.

Étape 3 : Pose f égale à l'intérieure et g égale à l'extérieure : la fonction cherchée est $g \circ f$.

Étape 4 : Vérifie en recomposant : calcule $g(f(x))$ et compare avec la formule de départ.

Étape 5 : S'il y a trois calculs emboîtés, la même démarche donne une composée de trois applications, à écrire de la dernière à la première.

Exemple résolu 2 : décomposer une fonction

Énoncé. Ecris $h(x) = \sqrt{3x + 1}$, puis $k(x) = (2x - 5)^3$, comme composées de deux applications simples.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
Pour h , si l'on devait calculer $h(1)$, on ferait d'abord $3 \times 1 + 1 = 4$, puis la racine carrée. L'intérieure est donc l'application affine, l'extérieure est la racine.	$h = g \circ f$ avec $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
On vérifie en recomposant, ce qui prend une seule ligne.	$g(f(x)) = \sqrt{3x + 1} = h(x)$ ✓
Pour k , on calculerait d'abord $2x - 5$, puis on élèverait au cube : même structure, avec une autre extérieure.	$k = g \circ f$ avec $f(x) = 2x - 5$ et $g(x) = x^3$.
On vérifie de la même façon.	$g(f(x)) = (2x - 5)^3 = k(x)$ ✓

Remarque. La décomposition n'est pas unique : on pourrait par exemple écrire h comme composée de $x \mapsto x + 1$, puis de $x \mapsto \sqrt{3x}$. Ce que l'on cherche en pratique, c'est la décomposition en fonctions **de référence**, celles dont on connaît déjà les variations et la courbe, car c'est elle qui rendra service dans l'étude de la fonction.

Exemple résolu 3 : composer trois applications

Énoncé. On donne $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$ et $h(x) = x + 3$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Détermine $(h \circ g \circ f)(x)$, puis $(g \circ h \circ f)(x)$.

Ce qu'on fait (explication)	Ce qu'on écrit (mathématiques)
On lit l'écriture de droite à gauche : dans $h \circ g \circ f$, c'est f qui commence, g qui suit, h qui termine. On avance donc étape par étape.	$f(x) = 2x - 1$, puis $g(2x - 1) = (2x - 1)^2$.
On applique enfin h , qui ajoute 3 au résultat précédent, puis on développe.	$(h \circ g \circ f)(x) = (2x - 1)^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 4$.
Pour la seconde composée, l'ordre change à partir de la deuxième étape : après f vient h , puis g .	$f(x) = 2x - 1$, puis $h(2x - 1) = 2x + 2$.
On termine par g , qui élève au carré, sans oublier les parenthèses.	$(g \circ h \circ f)(x) = (2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 4$.

Vérification. Testons en $x = 1$. Pour la première : $f(1) = 1$, $g(1) = 1$, $h(1) = 4$, et la formule donne $4 - 4 + 4 = 4$ ✓. Pour la seconde : $f(1) = 1$, $h(1) = 4$, $g(4) = 16$, et la formule donne $4 + 8 + 4 = 16$ ✓. Les deux résultats diffèrent, ce qui confirme une nouvelle fois que l'ordre de composition est déterminant, y compris quand ce sont les mêmes trois applications qui interviennent.

ATTENTION !

Dans $g \circ f$, c'est f qui agit **en premier**, bien qu'elle soit écrite à droite. Beaucoup d'erreurs viennent de cette convention : relis toujours $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ avant de commencer un calcul, et repère l'application « la plus proche du x ».

Deuxième piège, les **parenthèses**. En remplaçant la variable de g par l'expression de $f(x)$, il faut encadrer cette expression tout entière. Avec $f(x) = x - 3$ et $g(x) = x^2$, on obtient $(x - 3)^2$ et surtout pas $x - 3^2$ ni $x^2 - 3^2$.

Troisième piège, l'**ensemble de définition**. Une composée peut être définie sur un ensemble strictement plus petit que celui de f . Avec $f(x) = x - 5$ et $g(x) = \sqrt{x}$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais $g \circ f$ ne l'est que sur $[5; +\infty[$.

JE RAISONNE

Hypothèses (ce que dit l'énoncé). f est une bijection de E vers F et g est une bijection de F vers G . On s'intéresse à l'application $g \circ f$, qui va de E vers G .

Outil (la propriété que j'utilise). La caractérisation de la réciproque par les identités : si deux applications u et v vérifient $v \circ u = \text{Id}$ et $u \circ v = \text{Id}$, alors elles sont réciproques l'une de l'autre. J'utilise aussi $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $g^{-1} \circ g = \text{Id}_F$.

Conclusion (ce que j'en déduis). Prenons un élément x de E et faisons-lui subir $g \circ f$, puis $f^{-1} \circ g^{-1}$. On calcule d'abord $g(f(x))$, puis on lui applique g^{-1} , ce qui redonne $f(x)$, et enfin f^{-1} , ce qui redonne x . On a donc $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{Id}_E$, et le même calcul mené dans l'autre sens donne $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \text{Id}_G$. L'application $g \circ f$ est donc bijective et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Remarque l'inversion de l'ordre : ce n'est pas une coquetterie, c'est le cœur du résultat.

Rédaction type. « On sait que f et g sont bijectives (hypothèse). Or, en composant $g \circ f$ par $f^{-1} \circ g^{-1}$, on obtient l'identité dans les deux sens, car g^{-1} défait g puis f^{-1} défait f (outil). Donc $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$ (conclusion). »

Quel type de raisonnement ? C'est une **déduction directe**, appuyée sur une caractérisation : au lieu de chercher la réciproque en résolvant une équation, on **propose** une candidate et l'on vérifie qu'elle convient. Cette stratégie, dite d'analyse puis synthèse, est très économique et reviendra souvent. Pour retenir l'inversion de l'ordre, garde l'image du matin et du soir : on met les chaussettes puis les chaussures, on enlève les chaussures puis les chaussettes.

À TOI DE JOUER !

Exercice 7. Pour $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$, détermine $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 8. Ecris $h(x) = \frac{1}{2x + 5}$ comme composée $g \circ f$ de deux fonctions simples.

AUTO-EVALUATION : Test de fin de chapitre

1 point par question. Corrigés en fin de chapitre.

1. Que signifie « f est injective » ?
2. Que signifie « f est surjective » ?
3. Qu'est-ce qu'une application bijective ?
4. Vrai ou faux : $g(x) = x^2$ est injective sur $\mathbb{R}$.
5. Combien d'antécédents a un élément par une application bijective ?
6. Combien de solutions a $f(x) = \lambda$ si f est bijective ?
7. Graphiquement, comment reconnaît-on une application injective ?
8. La nature de f dépend-elle de l'ensemble d'arrivée ? Donne un exemple.
9. Qui admet une réciproque : toute application ou seulement une bijection ?

10. Pour $f(x) = 3x$, donne f^{-1} .
11. Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à quelle droite ?
12. Ne pas confondre f^{-1} et... ?
13. Ecris la définition de $(g \circ f)(x)$.
14. A-t-on toujours $g \circ f = f \circ g$?
15. Pour $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 2x$, calcule $(g \circ f)(3)$.
16. Ecris $\sqrt{x^2 + 1}$ comme composée de deux fonctions.
17. Que valent $f^{-1} \circ f$ et $f \circ f^{-1}$ si f est bijective ?
18. Donne $(g \circ f)^{-1}$ en fonction de f^{-1} et g^{-1} .
19. Quelles sont les deux conditions pour qu'une correspondance soit une application ?
20. Qu'appelle-t-on l'ensemble image $f(E)$? Comment l'utilise-t-on pour rendre une application surjective ?
21. Donne l'ensemble image de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$, puis un ensemble de départ sur lequel cette application devient injective.
22. Pour $f(x) = x - 5$ et $g(x) = \sqrt{x}$, quel est l'ensemble de définition de $g \circ f$?

JE M'EXERCE

Leçon 1 : Injective, surjective, bijective

Exercice 9. Etudie l'injectivité de $f(x) = 5x - 1$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Etudie l'injectivité de $f(x) = -2x + 3$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 11. f est définie par $f(x) = 8x + 15$. Démontre que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Démontre que $f(x) = -3x + 7$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 13. f est définie par $f(x) = 2x^2 + 1$. Cette application est-elle injective sur $\mathbb{R}$? Justifie par un contre-exemple.

Exercice 14. L'application $g(x) = x^2 - 3$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$? Donne un contre-exemple.

Exercice 15. Soit $f(x) = x^2$ de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$. Démontre qu'elle est injective, puis bijective.

Exercice 16. Soit $f(x) = x^2$ de $] -\infty; 0]$ vers $[0; +\infty[$. Est-elle injective ? bijective ?

Exercice 17. $g(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est-elle surjective ? Et de $\mathbb{R}$ vers $[0; +\infty[$?

Exercice 18. $f(x) = x^3$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est-elle surjective ? injective ? bijective ?

Exercice 19. On donne $E = \{1; 2; 3\}$, $F = \{a; b\}$. Une application de E vers F peut-elle être injective ? surjective ? Explique.

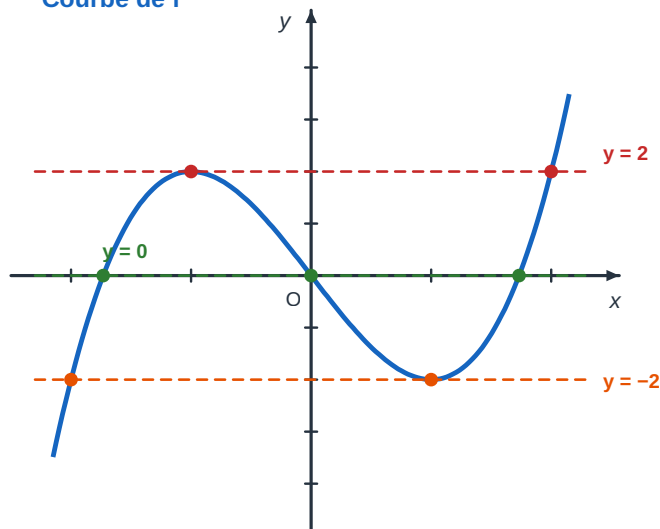
Exercice 20. On donne $E = \{1; 2\}$, $F = \{a; b; c\}$. Une application de E vers F peut-elle être surjective ? injective ?

Exercice 21. L'application « numéro matricule » qui, à chaque élève d'une classe, associe son matricule (tous distincts) est-elle injective ? bijective vers l'ensemble des matricules attribués ?

Exercice 22. Une application $f : E \rightarrow F$ vérifie $f(a) = f(b)$ avec $a \neq b$. Peut-elle être injective ? surjective ?

Exercice 23. Le plan est muni d'un repère orthonormé. f est donnée par sa représentation graphique.

Courbe de f



On compte les points communs avec chaque horizontale

1. f est-elle injective ? surjective ? bijective ? 2) Combien de solutions a $f(x) = 2$? $f(x) = 0$?

Exercice 24. Vrai ou faux, en justifiant : « une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est injective ».

Leçon 2 : L'équation $f(x) = \lambda$

Exercice 25. Discute, selon λ , le nombre de solutions de $3x + 2 = \lambda$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 26. Discute, selon λ , le nombre de solutions de $-x + 4 = \lambda$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 27. Soit $f(x) = x^2 - 1$. Combien de solutions a $f(x) = \lambda$ pour $\lambda = -1$? $\lambda = 3$? $\lambda = -2$?

Exercice 28. Soit $f(x) = x^2 + 2$. Combien de solutions a $f(x) = \lambda$ pour $\lambda = 2$? $\lambda = 6$? $\lambda = 0$?

Exercice 29. Montre que $f(x) = x^3$ vérifie : $f(x) = \lambda$ a exactement une solution pour tout λ .

Exercice 30. Pour $f(x) = |x|$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, combien $f(x) = \lambda$ a-t-elle de solutions selon le signe de λ ?

Exercice 31. Soit $f(x) = 2x - 6$. Résous $f(x) = 0$, $f(x) = 4$, $f(x) = -2$; combien de solutions à chaque fois ?

Exercice 32. Pour $f(x) = |x - 2|$, combien de solutions a $f(x) = 3$? $f(x) = 0$? $f(x) = -1$?

Exercice 33. Une fonction a le tableau de variation : décroissante sur $] -\infty ; 1]$ (de $+\infty$ à -2), croissante sur $[1 ; +\infty[$ (de -2 à $+\infty$). Discute le nombre de solutions de $f(x) = \lambda$ selon λ .

Exercice 34. Avec la courbe de l'exercice 23, détermine l'ensemble des λ pour lesquels $f(x) = \lambda$ a exactement deux solutions.

Exercice 35. Résous $x^2 = 5$ et $x^2 = -5$; interprète en termes d'antécédents.

Exercice 36. Pour $f(x) = (x - 1)^2$, combien de solutions a $f(x) = 4$? $f(x) = 0$?

Leçon 3 : Application réciproque

Exercice 37. Montre que $f(x) = 4x - 8$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et détermine f^{-1} .

Exercice 38. Montre que $f(x) = -2x + 5$ est bijective et détermine f^{-1} .

Exercice 39. Pour $f(x) = 8x + 15$, détermine f^{-1} et vérifie que $f^{-1}(f(1)) = 1$.

Exercice 40. Soit $f(x) = \frac{2x-1}{3}$. Détermine f^{-1} .

Exercice 41. Soit $f(x) = \frac{x-3}{4}$. Détermine f^{-1} et calcule $f^{-1}(2)$.

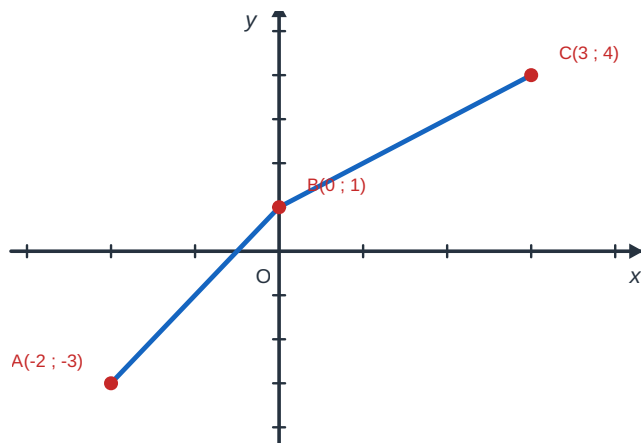
Exercice 42. f est l'application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Détermine sa réciproque et précise son ensemble de définition.

Exercice 43. Soit $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ ($x \neq 1$). Détermine f^{-1} ; que remarques-tu ?

Exercice 44. Pour $f(x) = x^2$ de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$, détermine f^{-1} .

Exercice 45. Vrai ou faux : $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ admet une réciproque. Justifie.

Exercice 46. Dans un repère orthonormé (O, I, J) , f est l'application de $[-2; 3]$ dans $[-3; 4]$ dont la représentation graphique est la ligne brisée $[AB] \cup [BC]$ avec $A(-2; -3)$, $B(0; 1)$, $C(3; 4)$.



1. Démontre que f est bijective. 2) Construis la représentation graphique de f^{-1} .

Exercice 47. Les courbes de f et f^{-1} se coupent-elles nécessairement sur la droite $y = x$? Illustre avec $f(x) = 2x - 1$.

Exercice 48. Soit $f(x) = 3x + 1$. Détermine f^{-1} , puis vérifie que $f(f^{-1}(x)) = x$.

Exercice 49. Soit $f(x) = \frac{5}{x}$ ($x \neq 0$). Détermine f^{-1} ; que remarques-tu ?

Exercice 50. Distingue f^{-1} et $\frac{1}{f}$ pour $f(x) = 2x + 4$: donne les deux formules.

Exercice 51. Soit f affine avec $f(1) = 3$ et $f(2) = 5$. Détermine f , puis f^{-1} .

Exercice 52. La fonction $f(x) = x^2 - 4x + 3$ est-elle bijective sur $\mathbb{R}$? Sur $[2; +\infty[$? (Pense à la forme canonique.)

Leçon 4 : Composition

Exercice 53. On donne $f(x) = x - 3$ et $g(x) = x^2$. Détermine $f \circ g$ et $g \circ f$, avec leurs ensembles de définition.

Exercice 54. Pour $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = 3x - 4$, calcule $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 55. $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x + 3$. Détermine $(h \circ g \circ f)(x)$ et $(g \circ h \circ f)(x)$.

Exercice 56. Pour $f(x) = x + 2$ et $g(x) = \sqrt{x}$, détermine $g \circ f$ et son ensemble de définition.

Exercice 57. Ecris comme composée de fonctions de référence : a) $h(x) = \sqrt{3x + 1}$; b) $p(x) = \frac{1}{2x + 5}$; c) $q(x) = (x - 1)^2$.

Exercice 58. Calcule $(f \circ f)(x)$ pour $f(x) = 2x - 1$.

Exercice 59. Pour $f(x) = x - 3$ et $g(x) = x^2$, calcule $(g \circ f)(5)$ et $(f \circ g)(5)$.

Exercice 60. Pour $f(x) = 3x$ et $g(x) = x + 1$, calcule $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$; sont-elles égales ?

Exercice 61. Ecris $r(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ comme composée de deux fonctions.

Exercice 62. Soit $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \frac{x - 1}{2}$. Calcule $g \circ f$; qu'en déduis-tu ?

Exercice 63. Pour $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 4$, calcule $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 64. Décompose $s(x) = \frac{3}{(x - 2)^2}$ en composée de fonctions simples.

Exercice 65. Montre que si $f(x) = x + a$ et $g(x) = x + b$, alors $g \circ f = f \circ g$.

Exercice 66. Pour $f(x) = -x$ et $g(x) = x^2$, calcule $g \circ f$ et $f \circ g$; commente.

Exercice 67. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). Calcule $(f \circ f)(x)$.

Exercice 68. Pour $f(x) = 2x$ et $g(x) = x - 6$, résous $(g \circ f)(x) = 0$.

J'APPROFONDIS

Approfondissements et démonstrations

Exercice 69. On donne $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1}$ et $g(x) = 3x - 2$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. 1) Démontre que, pour tout réel x , $\frac{1}{2} < f(x) \leq 1$. 2) g est-elle bornée sur $\mathbb{R}$? 3) La composée $g \circ f$ est-elle bornée ?

Exercice 70. Soit $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$ ($x \neq 1$). 1) Montre que f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. 2) Détermine f^{-1} . 3) Que remarques-tu ?

Exercice 71. Soit f et g bijectives. Démontre que $g \circ f$ est bijective et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Exercice 72. Soit $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \frac{x - 1}{2}$. Montre que $g = f^{-1}$ en calculant $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 73. Montre qu'une fonction affine $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) est toujours bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et donne f^{-1} en fonction de a et b .

Exercice 74. Soit f strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Démontre que f est injective.

Exercice 75. Une application $f : E \rightarrow E$ vérifie $f \circ f = f$. Si f est bijective, montre que f est l'identité.

Exercice 76. Soit $f(x) = 1 - x$. Calcule $f \circ f$; qu'en déduis-tu sur f^{-1} ?

Exercices supplémentaires

Exercice 77. f est de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x$. 1) Ecris f sous forme canonique. 2) f est-elle injective sur $\mathbb{R}$? sur $[1 ; +\infty[$?

Exercice 78. $f(x) = \frac{3x}{x + 2}$ ($x \neq -2$). Détermine f^{-1} et son ensemble de définition.

- Exercice 79.** Pour $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = 2x - 3$, détermine $g \circ f$ et $f \circ g$.
- Exercice 80.** $f(x) = \sqrt{x-1}$ ($x \geq 1$). 1) Montre que f est bijective de $[1; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$. 2) Détermine f^{-1} .
- Exercice 81.** Décompose $u(x) = \sqrt{2x+3}$ puis $v(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en composées de fonctions de référence.
- Exercice 82.** Pour $f(x) = x - 4$, $g(x) = x^2$, $h(x) = 3x$, calcule $(h \circ g \circ f)(x)$.
- Exercice 83.** $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ($x \neq -1$). Détermine f^{-1} .
- Exercice 84.** Une application $f : \{1; 2; 3; 4\} \rightarrow \{1; 2; 3; 4\}$ est définie par $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 1$. 1) Est-elle bijective ? 2) Détermine f^{-1} .
- Exercice 85.** Résous $(g \circ f)(x) = 5$ pour $f(x) = x + 1$ et $g(x) = 2x - 1$.
- Exercice 86.** $f(x) = 2x - 3$. Détermine x tel que $f^{-1}(x) = 4$.
- Exercice 87.** Montre que $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) est sa propre réciproque.
- Exercice 88.** Pour $f(x) = x^2$ (de $[0; +\infty[$) et $g(x) = x + 1$, calcule $g \circ f$ et $f \circ g$ et compare.
- Exercice 89.** f affine vérifie $f(0) = 2$ et $f(3) = 8$. Détermine f , montre qu'elle est bijective, donne f^{-1} .
- Exercice 90.** Détermine toutes les fonctions affines f telles que $f = f^{-1}$.
- Exercice 91.** Pour $f(x) = 3 - x$ et $g(x) = 2x$, résous $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.
- Exercice 92.** $f(x) = x^3 + 1$. Montre que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et détermine f^{-1} .
- Exercice 93.** Soit $f(x) = |x|$ et $g(x) = x - 2$. Calcule $g \circ f$ et $f \circ g$; sont-elles égales ?
- Exercice 94.** f est de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + |x|$. 1) Exprime $f(x)$ sans valeur absolue selon le signe de x . 2) f est-elle bijective ?
- Exercice 95.** On donne $f(x) = \frac{4x-1}{2}$. Résous $f(x) = f^{-1}(x)$.

Maths et vie quotidienne

- Exercice 96 (Maths et vie quotidienne).** Un cambiste convertit des francs CFA par $f(x) = 0,0015x$. 1) f est-elle bijective de $[0; +\infty[$ vers $[0; +\infty[$? 2) Donne la conversion inverse f^{-1} .
- Exercice 97 (Maths et vie quotidienne).** Un code transforme un numéro x en $c(x) = 2x + 5$. 1) Montre que le codage est bijectif (donc décodable). 2) Donne la fonction de décodage et décode $c = 27$.
- Exercice 98 (Maths et vie quotidienne).** A un concours, chaque candidat reçoit un numéro d'anonymat, tous distincts. Explique pourquoi l'application est injective, et bijective vers l'ensemble des numéros attribués.
- Exercice 99 (Maths et vie quotidienne).** Deux remises successives : -10% ($f(x) = 0,9x$), puis -500 FCFA ($g(x) = x - 500$). 1) Exprime $(g \circ f)(x)$. 2) Compare à $(f \circ g)(x)$ pour $x = 5000$.
- Exercice 100 (Maths et vie quotidienne).** Un technicien convertit une température par $f(x) = 2x + 30$. Donne f^{-1} et retrouve la température Celsius correspondant à 90 sur l'autre échelle.
- Exercice 101 (Maths et vie quotidienne).** Le prix de x sacs de riz est $p(x) = 12000x$. 1) p est injective : que dire du nombre de solutions de $p(x) = \lambda$? 2) $\lambda = 30000$ FCFA correspond-il à un nombre entier de sacs ?

Exercice 102 (Maths et vie quotidienne). Une imprimante facture $f(x) = 25x + 500$ (FCFA) pour x copies. Détermine f^{-1} ; combien de copies pour une facture de 3000 FCFA ?

J'écris et j'explique

Exercice 103 (J'écris et j'explique). Un élève écrit : « toute application admet une réciproque ». Explique pourquoi c'est faux, avec un exemple.

Exercice 104 (J'écris et j'explique). Explique, avec tes mots, la différence entre injective et surjective, en donnant un exemple de chaque qui n'est **pas** bijective.

Exercice 105 (J'écris et j'explique). Explique pourquoi, dans $g \circ f$, on applique f avant g , et pourquoi l'ordre change en général le résultat.

SITUATIONS D'INTÉGRATION

Compétence visée : résoudre, dans des situations d'organisation d'un événement sportif, de commerce agricole et de conduite d'un atelier, des problèmes d'identification, de contrôle et de décision, en mobilisant les applications injectives, surjectives et bijectives.

Ressources mobilisées : reconnaître une application et étudier son injectivité, sa surjectivité, sa bijectivité ; comparer les effectifs de deux ensembles finis ; déterminer un ensemble image et repérer les valeurs non atteintes ; discuter le nombre de solutions de $f(x) = \lambda$ selon λ ; déterminer l'application réciproque d'une bijection affine ou homographique ; composer deux applications et comparer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Moment d'évaluation : à la fin du chapitre, une fois les quatre leçons traitées. Corrigés-types et grille de correction en fin de chapitre.

Situation d'intégration 1 : Les plaques de la course de Kokologho. A Kokologho, le comité qui organise la course cycliste a fait fabriquer des plaques de guidon : chaque plaque porte l'une des trois lettres A, B ou C, suivie d'un nombre entier compris entre 1 et 60. Au soir de la clôture, 176 coureurs sont inscrits, venus de sept communes voisines ; le droit d'inscription est de 1 000 FCFA et le parcours mesure 42 km. Le président exige que deux coureurs ne portent jamais la même plaque. Dis-lui si le lot fabriqué le lui permet, et ce qu'il adviendra des plaques restantes.

Situation d'intégration 2 : Le carnet du collecteur de Komsilga. Le collecteur de Komsilga ramasse les caisses de tomates des maraîchers et va les revendre en ville. Il paie 3 500 FCFA la caisse et retient 4 000 FCFA par livraison pour le carburant du tricycle, quel que soit le nombre de caisses. Boukary a livré lundi, a reçu 66 000 FCFA, puis a perdu son reçu ; en face de son nom, le carnet du collecteur porte la mention « 22 caisses ». Une caisse pèse environ 25 kg et le champ de Boukary couvre 0,4 hectare. Dis à la trésorière de la coopérative si elle peut valider cette écriture.

Situation d'intégration 3 : L'affiche de Tanghin-Dassouri. A Tanghin-Dassouri, une coopérative maraîchère loue une motopompe pour la saison sèche : 60 000 FCFA pour toute la campagne, quel que soit l'usage, plus 1 500 FCFA de carburant par planche irriguée. Le groupement compte 48 adhérents, la parcelle collective couvre 3 hectares et la campagne dure quatre mois. Sur l'affiche préparée pour l'assemblée, un membre a écrit : « plus nous irriguerons de planches, moins la planche nous coûtera ; en irriguant assez, nous passerons au-dessous de 1 500 FCFA la planche ». Le président hésite à faire tirer l'affiche : tranche la question.

Situation d'intégration 4 : La fiche non datée de Zitenga. La banque de céréales de Zitenga note chaque mois le prix du sac de mil. Depuis la récolte de novembre, ce prix a baissé de mois en mois, de 17 500 FCFA jusqu'à 12 000 FCFA en février ; il est ensuite remonté de mois en mois, jusqu'à 22 000 FCFA en août. Le magasin abrite 220 sacs et emploie deux magasiniers. Le gérant retrouve une fiche de vente non datée, où ne figure que le prix de 15 000 FCFA le sac. Dis-lui s'il peut en déduire le mois de la vente.

Situation d'intégration 5 : Les deux avantages du Bazèga. Au marché du Bazèga, un dépôt de tôles accorde pendant la foire une remise de 10% sur le prix affiché, et la mairie remet en plus à chaque acheteur un bon de 1 500 FCFA à valoir sur son achat. La caissière applique les deux avantages dans l'ordre qui lui vient, et personne ne lui a jamais rien dit. Le dépôt ouvre à 7 heures, il a servi trois clients ce matin et la tôle mesure 3 mètres. Un client se présente pour une tôle affichée à 12 000 FCFA : conseille la caissière sur l'ordre qu'elle doit retenir pour tous.

Situation d'intégration 6 : Le séchoir de Sourgou. A Sourgou, un groupement féminin sèche des tomates dans un séchoir solaire. Le cadran du séchoir ne donne pas de degrés : il porte une graduation propre au fabricant, qui monte régulièrement avec la chaleur. Le technicien a relevé deux repères avec son thermomètre : 30 degrés Celsius correspondent à la graduation 75, et 50 degrés à la graduation 115. La notice avertit que les tomates noircissent au-dessus de 60 degrés. Le séchoir porte 14 claies et a coûté 240 000 FCFA. Ce midi, l'aiguille est sur 131 : dis au technicien s'il doit ouvrir les aérations.

TROUVE L'ERREUR

Enoncé fautif	Ce qui ne va pas / la correction
« $g(x) = x^2$ est injective car x^2 est une seule valeur »	Faux : $g(2) = g(-2) = 4$ avec $2 \neq -2$. Sur $\mathbb{R}$, g n'est pas injective.
« Toute application admet une réciproque »	Faux : seule une bijection admet une réciproque. $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$ n'en a pas.
« $g \circ f = f \circ g$ toujours »	Faux : en général l'ordre compte. Pour $f(x) = x - 3$, $g(x) = x^2$: $g \circ f(x) = (x - 3)^2$ mais $f \circ g(x) = x^2 - 3$.
« $f^{-1}(x)$, c'est $\frac{1}{f(x)}$ »	Faux : la réciproque n'est pas l'inverse. Pour $f(x) = 2x$, $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ mais $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x}$.
« $f(x) = \lambda$ a une solution, donc une seule »	Faux : « une solution » ne veut pas dire « une seule » ; cela dépend de la nature de f (préciser combien, selon λ).

BANQUE D'EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

Exercices d'entraînement complémentaires, classés par thème. Corrigés non fournis : cherche, rédige, puis fais vérifier.

Exercices guidés (avec correction)

Exercice G1 (Les bénéfices d'Adama). Adama modélise son bénéfice par panier de mangues vendu par $f(x) = x + 2$, où $x \in \mathbb{R}_+$ est le nombre de paniers. **1)** Montre que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une application. **2)** Est-elle injective ? **3)** Est-elle surjective si $B = \mathbb{R}$? si $B = [2; +\infty[$? **4)** Si f est bijective, détermine sa réciproque.

CE QU'IL FAUT RETENIR

Correction. 1) Chaque x a une unique image : application. **2)** $x_1 + 2 = x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$: injective. **3)** $f(x) = y \iff x = y - 2$; pour $x \geq 0$ il faut $y \geq 2$: $f(\mathbb{R}_+) = [2; +\infty[$, donc non surjective vers $\mathbb{R}$ mais surjective vers $[2; +\infty[$. **4)** $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [2; +\infty[$ est bijective et $f^{-1}(x) = x - 2$.

Exercice G2 (Les plants de mil). Yacouba modélise une grandeur par $h(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1; 1]$. **1)** Détermine l'ensemble B pour que $h : [-1; 1] \rightarrow B$ soit surjective. **2)** h est-elle injective ? **3)** En restreignant convenablement, trouve h^{-1} .

CE QU'IL FAUT RETENIR

Correction. 1) $1 - x^2 \in [0; 1]$ donc $h(x) \in [0; 1]$; tout $y \in [0; 1]$ a pour antécédents $x = \pm \sqrt{1 - y^2}$: $B = [0; 1]$. **2)** $h(x) = h(-x)$: non injective sur $[-1; 1]$; mais injective sur $[0; 1]$. **3)** $h : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ est bijective et $h^{-1}(y) = \sqrt{1 - y^2}$.

Fiche auto-corrective

Exercice	Solution
Montre que $f(x) = 3x - 1$ est injective	$3x_1 - 1 = 3x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$
Si $f(x) = x + 1$, trouve f^{-1}	$f^{-1}(x) = x - 1$
$(g \circ f)(x)$ pour $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$	$x^2 + 1$

Mise en route (en contexte)

Exercice E1. 1) Le prix par mètre de tissu est $f(x) = 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}_+$. Montre que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une application ; est-elle injective ? surjective vers $\mathbb{R}$? vers $[1; +\infty[$? **2)** Soit $g(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$: montre que g est une application et vérifie qu'elle est injective.

Exercice E2. 1) Le prix par kilogramme d'arachides est $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Vérifie que f est injective, puis détermine B pour que $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow B$ soit surjective. **2)** Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, $x \neq 1$: simplifie $f(x)$, précise son domaine, puis étudie l'injectivité et la surjectivité vers $\mathbb{R}$.

Applications ou non ?

Exercice E3. Les fonctions suivantes sont-elles des applications ? Justifie. **a)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2 + 1$; **b)** $g : [-4; 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x+1}$; **c)** $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$; **d)** $k : \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x-2}$.

Exercice E4. Parmi les fonctions suivantes, précise celles qui sont des applications : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - \sqrt{x^2}$; $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$; $h :]-\infty; 3] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{-3x+2}$ (tel qu'imprimé ; vérifier le domaine) ; $k :]-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^2}{3x-5}$; $m : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$; $n :]-1; 1[\rightarrow]-1; 1[$, $x \mapsto \frac{x+1}{x^2+1}$ (tel qu'imprimé) ; $v :]\sqrt{3}; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{7-5x}{|x-\sqrt{3}|}$.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice E5. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + 2$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -2x + 1$. **1)** Étudie la qualité de chacune : injective, surjective, bijective ? **2)** Si bijective, détermine la réciproque.

Exercice E6. Montre si les applications suivantes sont injectives ou surjectives : **a)** $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z},$

$$x \mapsto 2x + 5 ; \text{ **b)** } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + 1 ; \text{ **c)** } h : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x + 3}{1 - 2x} ; \text{ **d)** }$$

$$k : \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{3} \right\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}, x \mapsto \frac{2x}{1 + 3x}.$$

Exercice E7. Injectives, surjectives ou bijectives ? Justifie : $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 1 ; g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z},$

$$n \mapsto n + 1 ; h : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x + 2| ; i : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1 - x} ; j : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\},$$
$$x \mapsto \frac{2x + 1}{x - 1}.$$

Exercice E8. 1) Soit $f : [-1; 1] \rightarrow B, x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$: détermine B pour que f soit surjective. **2)** Soit

$g : A \rightarrow [\sqrt{3}; \sqrt{5}], x \mapsto \sqrt{\frac{x + 3}{x - 1}}$ (énoncé adapté) : trouve A pour que g soit une bijection, puis détermine sa réciproque.

Exercice E9. Dans chaque cas, dis si f est injective, surjective ou bijective, et détermine la réciproque le

cas échéant : **a)** $f : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto (x - 1)^2$; **b)** $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0; 1], x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ (tel qu'imprimé ; discuter l'atteinte de 1) ; **c)** $f : \mathbb{R}_- \rightarrow [0; 1[, x \mapsto \frac{x}{x - 1}$ (énoncé adapté) ; **d)** $f : \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[\rightarrow \mathbb{R}_+,$
 $x \mapsto \sqrt{2x + 1}$; **e)** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + 3x$; **f)** $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}, x \mapsto 1 + \frac{1}{x}.$

Exercice E10. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$. **1)** h est-elle injective ? surjective ? **2)** Montre que

$-1 \leq h(x) \leq 1$ pour tout x . **3)** Montre que $k : [-1; 1] \rightarrow [-1; 1], k(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$, est une bijection.

Exercice E11. Soit $g : [0; 2] \rightarrow [3; \sqrt{13}], x \mapsto \sqrt{x^2 + 9}$. **1)** Montre que g est bijective. **2)** Sans expliciter g^{-1} , calcule $g^{-1}(3)$. **3)** Explicite $g^{-1}(x)$. **4)** Calcule $(g \circ g^{-1})(x)$ et $(g^{-1} \circ g)(x)$.

Exercice E12. 1) Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$. **a)** Montre que si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ l'est.

b) Montre que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. **2)** Soit $q :]-1; 1[\rightarrow]-1; 1[, q(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ (énoncé adapté). **a)** Résous dans $] - 1; 1[$ l'équation $q(x) = m, m \in] - 1; 1[$. **b)** Dédus-en que q est bijective et explicite $q^{-1}(x)$.

Exercice E13. Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x| - 2 ; g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{3|x|} ; h :] - \infty; 3] \rightarrow \mathbb{R}_+,$

$x \mapsto \sqrt{3 - x}$. **1)** **a)** f est-elle injective ? surjective ? **b)** Même question pour g . **2)** **a)** Montre que h est bijective et détermine h^{-1} . **b)** Construis la courbe de h^{-1} dans un repère orthonormé. **c)** Dédus-en une construction de la courbe de h .

Exercice E14. Soient $f_1 : x \mapsto x^2 - 1, f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}, f_3 : x \mapsto 3x - 2, f_4 : x \mapsto x^3$ et $f_5 : x \mapsto \sqrt{x}$ (énoncé complété). Décompose à l'aide de ces fonctions : **a)** $f : x \mapsto 3\sqrt{x} - 2$; **b)** $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$; **c)**
 $h : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$; **d)** $k : x \mapsto (3x - 2)^3$.

Exercice E15. 1) Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 6}{x}$. **a)** Résous $f(x) = 3$. **b)** Qu'en déduis-tu pour f (injectivité) ? **c)** f est-elle surjective ? 2) Soit $g : x \mapsto \frac{1}{x-1}$: détermine trois fonctions élémentaires u, v, w telles que $g = w \circ v \circ u$.

Exercice E16. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [-1; +\infty[, x \mapsto x^2 - 1$ (énoncé adapté). 1) Montre que φ est surjective. 2) Montre que φ n'est pas injective. 3) **a)** Trouve un ensemble $I \subset \mathbb{R}$ tel que la restriction de φ à I soit une bijection de I sur $[-1; +\infty[$. **b)** Détermine la réciproque.

Exercice E17. Soient $f : [-4; 3] \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{12 - x - x^2}, g :]-\infty; 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -2x + 1$ et $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ (énoncé complété). 1) Détermine l'ensemble de définition de $h \circ g \circ f$ puis calcule $(h \circ g \circ f)(x)$. 2) Détermine l'ensemble de définition de $g \circ h \circ f$ puis calcule $(g \circ h \circ f)(x)$.

Exercice E18. Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soient $f : [-2; 1] \rightarrow [1; 10], x \mapsto (x-1)^2 + 1$ et $g : [1; 10] \rightarrow [-2; 1], x \mapsto 1 - \sqrt{x-1}$. 1) Construis la courbe (C) de f ; déduis-en que f est bijective. 2) Démontre que g est la bijection réciproque de f . 3) Construis la courbe (C') de g dans le même repère.

Exercice E19. 1) Soit $h : [-1; +\infty[\rightarrow [2; +\infty[, x \mapsto x^2 + 2x + 3$. **a)** Montre que h est injective. **b)** Montre que h est surjective. **c)** Déduis-en que h est bijective et détermine h^{-1} . 2) Soient $u : [0; 1[\rightarrow]-\infty; 0], x \mapsto -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$ et $v :]-\infty; 0] \rightarrow [0; 1[, x \mapsto \frac{x^2}{x^2 + 1}$. **a)** Détermine les domaines de $u \circ v$ et $v \circ u$. **b)** Calcule $(u \circ v)(x)$ et $(v \circ u)(x)$.

Exercice E20. 1) Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ définie par $f(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair et $f(n) = \frac{n+1}{2}$ si n est impair. f est-elle injective ? surjective ? 2) Dans chaque cas, trouve u et v telles que $g = v \circ u$: **a)** $g : \left[\frac{2}{5}; +\infty\right[\rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{5x-2}$; **b)** $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$; **c)** $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{|x|+1}$.

Exercice E21. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x|x|}{x^2 + 1}$. 1) f est-elle surjective ? 2) Montre que f est injective. 3) Montre que $-1 < f(x) < 1$ pour tout x . 4) Montre que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $] -1; 1[$. 5) Explicite la réciproque f^{-1} .

Exercice E22. 1) Soient $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ et $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$. **a)** Détermine $D_{g \circ f}$ et $D_{f \circ g}$. **b)** Calcule $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ g)(x)$. 2) Soit $h : [0; +\infty[\rightarrow \left[\frac{5}{7}; 1\right], x \mapsto \frac{2x+5}{2x+7}$ (énoncé adapté). **a)** Montre que h est bijective. **b)** Explicite h^{-1} .

Exercice E23. 1) Soit $u :]-\infty; 0[\rightarrow]-1; 1[, x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. Montre que u est bijective et détermine $u^{-1}(x)$ pour $x \in]-1; 1[$. 2) Soit $v :]-1; 1[\rightarrow]-\infty; 0[, x \mapsto -\sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$ (énoncé adapté). Calcule $(u \circ v)(x)$ et $(v \circ u)(x)$; que remarques-tu ?

Exercice E24. 1) Soit $f : [1; +\infty[\rightarrow [1; +\infty[, x \mapsto x + \sqrt{x^2 - x}$. **a)** Vérifie que f est une application. **b)** Montre que f est bijective et détermine f^{-1} . 2) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 1$. **a)** Montre que $g(\mathbb{R}) \subset [1; +\infty[$. **b)** Détermine $(f \circ g)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice E25. Soient $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = x^2 - x + 1$ définies sur $\mathbb{R}$. 1) **a)** Montre que le réel 1 a deux antécédents par f , à préciser. **b)** Même question pour g . 2) Déduis-en que f et g ne sont pas bijectives.

Exercice E26. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$. **1) a)** Montre que f est injective. **b)** Montre que f n'est pas surjective vers $\mathbb{R}$. **2) a)** Vérifie que le réel 2 n'a pas d'antécédent. **b)** Détermine B pour que f soit surjective de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ vers B .

Exercice E27. Soit $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x^2+1}{x}$. **1) a)** Vérifie que 0 n'a pas d'antécédent par g . **b)** Conséquence sur la qualité de g ? **2) a)** Vérifie que $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$ ont la même image, à préciser. **b)** Conséquence ? **3)** Soit h la restriction de g à $[1; +\infty[$: montre que h est bijective de $[1; +\infty[$ vers $[2; +\infty[$.

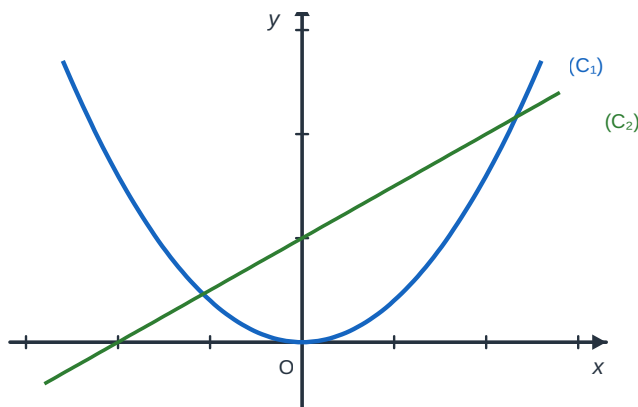
Exercice E28. Soient $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x+1}{3-x}$. **1) a)** Montre que 3 n'a pas d'antécédent par f . **b)** Montre que -1 n'a pas d'antécédent par g . **2) a)** Calcule $(g \circ f)(x)$ pour $x \neq -1$. **b)** Calcule $(f \circ g)(x)$ pour $x \neq 3$. **3)** f est en fait définie de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{3\}$: **a)** qualité de f ? **b)** définis f^{-1} .

Exercice E29. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x+2}{-x+1}$. **1)** Montre que f est injective mais pas surjective. **2) a)** Détermine B pour que f soit surjective vers B . **b)** Dédus-en que f est bijective vers B et définis f^{-1} .

Exercice E30. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 1$. **1) a)** Calcule $f(-1)$ et $f(1)$. **b)** f est-elle injective ? surjective ? **2) a)** Résous $f(x) = -3$. **b)** Conséquence ? **3)** Détermine l'ensemble des y tels que $f(x) = y$ ait des solutions. **4)** Soit g la restriction de f à $[0; +\infty[$ vers $[-1; +\infty[$: montre que g est bijective.

Exercice E31. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$. **1)** Montre que $-2, -1$ et 2 n'ont pas d'antécédent. **2)** Montre que tout $y \in]-1; 1[$ admet deux antécédents opposés. **3) a)** Détermine B pour que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers B (énoncé adapté). **b)** Détermine la réciproque.

Exercice E32. Le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne ci-dessous les courbes (C_1) et (C_2) de deux applications f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. **1)** En utilisant les droites horizontales, dis pour chacune si elle est injective, surjective, bijective. **2)** Pour celle qui est bijective, indique comment construire la courbe de sa réciproque. **3)** Discute, selon λ , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$, où f est l'application de courbe (C_1) .



BILAN DU CHAPITRE

Mots-clés : application · ensemble de départ · ensemble d'arrivée · image · antécédent · injective · surjective · bijective · ensemble image $f(E)$ · restriction · équation $f(x) = \lambda$ · discussion selon λ · stricte monotonie · application réciproque f^{-1} · involution · symétrie par rapport à la droite $y = x$ · composée $g \circ f$ · application identité Id · décomposition en fonctions de référence.

L'essentiel à retenir. - Une **application** de E vers F associe à chaque élément de E **une et une seule** image dans F : existence et unicité, les deux conditions se contrôlent.

- Tout se compte en **antécédents** : injective veut dire **au plus un**, surjective **au moins un**, bijective **exactement un**.
- L'injectivité se démontre en partant de $f(a) = f(b)$ pour aboutir à $a = b$; elle se réfute par un **contre-exemple** chiffré.
- La surjectivité se démontre en résolvant $f(x) = y$ pour un y **quelconque** de l'arrivée ; elle dépend du choix de cet ensemble d'arrivée.
- L'**ensemble image** $f(E)$ est la partie de F réellement atteinte : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$. Pour rendre une application surjective, on prend $B = f(E)$.
- Le nombre de solutions de $f(x) = \lambda$ est le nombre de points d'intersection de la courbe avec la droite $y = \lambda$: 0, 1, 2 ou davantage, **selon** λ .
- Une fonction **strictement monotone** sur un intervalle y est injective : au plus une solution.
- **Seule une bijection** admet une réciproque f^{-1} , définie par $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$. Dans un repère orthonormé, les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- Ne pas confondre la réciproque f^{-1} et l'inverse $\frac{1}{f}$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$: on applique **d'abord** f . En général $g \circ f \neq f \circ g$.
- $f^{-1} \circ f = \text{Id}$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}$; pour deux bijections, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$, avec inversion de l'ordre.

FICHE DE RÉVISION

Application. $f : E \rightarrow F$: chaque x de E a une image et une seule · contrôler les interdits de calcul (dénominateur nul, radicande négatif) · une formule seule ne suffit pas, il faut les deux ensembles.

Les trois mots. Injective : $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$, au plus un antécédent · surjective : tout y de F a au moins un antécédent, soit $f(E) = F$ · bijective : injective et surjective, exactement un antécédent.

Démonstrations types. Injectivité : partir de $f(a) = f(b)$, arriver à $a = b$ · réfutation : un contre-exemple chiffré · surjectivité : résoudre $f(x) = y$ pour y quelconque et vérifier que la solution est dans E · bijectivité : exactement une solution pour tout y .

Ensemble image. $f(E) = \{f(x) ; x \in E\}$ · rendre surjective : prendre $B = f(E)$ · rendre injective : restreindre le départ à un intervalle de stricte monotonie.

Equation $f(x) = \lambda$. Solutions = antécédents de λ = abscisses des points communs à la courbe et à la droite $y = \lambda$ · injective : au plus une · surjective : au moins une · bijective : exactement une · discussion selon λ , cas frontière aux extremums.

Réciproque. Existe **seulement** si f est bijective · $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$ · méthode : écrire $y = f(x)$, isoler x · $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(y)) = y$ · courbes symétriques par rapport à $y = x$ en repère orthonormé · $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Cas usuels. Affine $ax + b$ ($a \neq 0$) : bijective, $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$ · homographe $\frac{ax + b}{cx + d}$: chasser le dénominateur, factoriser par x , signaler la valeur interdite · carré sur $[0; +\infty[$: réciproque $\sqrt{}$ · involution : $f^{-1} = f$, par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Composée. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, f d'abord · parenthèses obligatoires en substituant · ensemble de définition : $f(x)$ existe **et** appartient au départ de g · décomposer : repérer l'opération intérieure puis l'extérieure · Id : $x \mapsto x$ · $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Réflexes. Toujours annoncer les deux ensembles · un contre-exemple suffit pour réfuter, jamais pour prouver · « une solution » ne veut pas dire « une seule » · vérifier une réciproque en calculant $f^{-1}(f(a))$ · vérifier une composée sur une valeur numérique.

CORRIGES

Corrigés des prérequis

P1. $f(1) = 3 \times 1 - 2 = 1$; l'antécédent de 7 vérifie $3x - 2 = 7$, donc $x = 3$.

P2. Antécédents de 16 : $x^2 = 16$ donne $\{-4; 4\}$. Antécédents de -4 : $x^2 = -4$ est impossible, l'ensemble est vide.

P3. $y = 2x + 1$ donne $x = \frac{y - 1}{2}$; $y = \frac{x - 3}{4}$ donne $x = 4y + 3$.

P4. Oui dans les deux cas : le symétrique de $(a; b)$ par rapport à la droite $y = x$ est $(b; a)$, et l'on a bien échangé les deux coordonnées.

P5. Oui, elle est strictement monotone : strictement croissante si $a > 0$, strictement décroissante si $a < 0$. Elle n'est constante que si $a = 0$, cas exclu.

Corrigés des « A toi de jouer ! »

1. Soient a et b tels que $5a - 1 = 5b - 1$. Alors $5a = 5b$, puis $a = b$: f est **injective**.

2. De $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: **non**, car -1 n'a pas d'antécédent (un carré n'est jamais négatif). De $\mathbb{R}$ vers $[0; +\infty[$: **oui**, car tout réel $y \geq 0$ admet $\sqrt{y}$ pour antécédent.

3. $f(x) = 3x + 2$ est affine avec $a = 3 \neq 0$, donc bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. L'équation a **une seule** solution, $x = \frac{\lambda - 2}{3}$, et cela pour tout réel λ .

4. L'équation s'écrit $x^2 = \lambda + 4$. Pour $\lambda = -4$: $x^2 = 0$, **une** solution, $x = 0$. Pour $\lambda = 5$: $x^2 = 9$, **deux** solutions, -3 et 3 . Pour $\lambda = -5$: $x^2 = -1$, **aucune** solution.

5. Injectivité : $2a - 1 = 2b - 1$ donne $a = b$. Surjectivité : $y = 2x - 1$ donne $x = \frac{y + 1}{2}$, qui existe pour tout y . Donc f est bijective et $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$.

6. $y = \frac{x + 1}{2}$ donne $2y = x + 1$, puis $x = 2y - 1$: $f^{-1}(x) = 2x - 1$. Vérification : $f(3) = \frac{4}{2} = 2$ et $f^{-1}(2) = 2 \times 2 - 1 = 3$ ✓

7. $(g \circ f)(x) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$; $(f \circ g)(x) = f(x^2) = 2x^2 + 1$. Les deux composées sont différentes.

8. On calcule d'abord $2x + 5$, puis on prend l'inverse : $h = g \circ f$ avec $f(x) = 2x + 5$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. La composée est définie pour $x \neq -\frac{5}{2}$.

Corrigés de l'auto-évaluation

1. Deux éléments distincts ont toujours des images distinctes, ce qui s'écrit $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$: chaque élément de l'arrivée a au plus un antécédent. 2. Tout élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent. 3. Une application à la fois injective et surjective : chaque élément de l'arrivée a exactement un antécédent. 4. Faux, car $g(2) = g(-2) = 4$. 5. Exactement un. 6. Exactement une, pour tout λ de l'ensemble d'arrivée. 7. Toute droite horizontale coupe la courbe au plus une fois. 8. Oui : $x \mapsto x^2$ n'est pas surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, mais elle l'est de $\mathbb{R}$ vers $[0 ; +\infty[$. 9. Seulement une bijection. 10. $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$. 11. La droite d'équation $y = x$, dans un repère orthonormé. 12. L'inverse $\frac{1}{f}$. 13. $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. 14. Non, en général les deux composées sont différentes. 15. $f(3) = 4$ puis $g(4) = 8$, donc $(g \circ f)(3) = 8$. 16. $g \circ f$ avec $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. 17. $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$. 18. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. 19. L'existence, chaque élément du départ a une image, et l'unicité, il n'en a qu'une. 20. $f(E)$ est l'ensemble de toutes les images des éléments de E ; en prenant $f(E)$ comme ensemble d'arrivée, on rend f surjective. 21. Ensemble image : $[0 ; +\infty[$; l'application devient injective sur $[0 ; +\infty[$, ou sur $] -\infty ; 0]$. 22. $(g \circ f)(x) = \sqrt{x - 5}$, donc $D = [5 ; +\infty[$.

Corrigés des exercices impairs

9. $5a - 1 = 5b - 1$ donne $a = b$: f est injective.

11. Injectivité : $8a + 15 = 8b + 15$ donne $a = b$. Surjectivité : pour tout réel y , $y = 8x + 15$ donne $x = \frac{y - 15}{8}$, qui est un réel. Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

13. Non : $f(1) = 3$ et $f(-1) = 3$ avec $1 \neq -1$. Ce contre-exemple suffit à réfuter l'injectivité.

15. Injectivité : si $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $a^2 = b^2$, alors $a = b$, car deux nombres positifs de même carré sont égaux. Surjectivité : pour $y \geq 0$, $x = \sqrt{y}$ convient et appartient à $[0 ; +\infty[$. Donc f est bijective.

17. De $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$: non, -1 n'a pas d'antécédent. De $\mathbb{R}$ vers $[0 ; +\infty[$: oui, tout $y \geq 0$ a pour antécédents $\sqrt{y}$ et $-\sqrt{y}$.

19. Injective : impossible, car E a trois éléments et F seulement deux, donc deux éléments au moins auront la même image. Surjective : possible, par exemple $1 \mapsto a$, $2 \mapsto b$, $3 \mapsto b$.

21. Les matricules étant tous distincts, deux élèves différents ont des images différentes : l'application est **injective**. Vers l'ensemble des matricules effectivement attribués, elle est aussi surjective par construction, donc **bijective**.

23. 1) L'horizontale $y = 0$ coupe la courbe en trois points : f n'est pas injective. En prolongeant la courbe vers le bas à gauche et vers le haut à droite, toute horizontale la coupe au moins une fois : f est surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Elle n'est donc pas bijective. 2) $f(x) = 2$ a **deux** solutions (deux points communs avec $y = 2$) et $f(x) = 0$ en a **trois**.

25. $f(x) = 3x + 2$ est affine avec $a = 3 \neq 0$: pour tout λ , l'équation a **exactement une** solution,

$$x = \frac{\lambda - 2}{3}.$$

27. L'équation devient $x^2 = \lambda + 1$. Pour $\lambda = -1$: $x^2 = 0$, **une** solution. Pour $\lambda = 3$: $x^2 = 4$, **deux** solutions, -2 et 2 . Pour $\lambda = -2$: $x^2 = -1$, **aucune** solution.

29. Injectivité : si $a^3 = b^3$, alors $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0$; or $a^2 + ab + b^2$ ne s'annule que pour $a = b = 0$, donc dans tous les cas $a = b$. Surjectivité : tout réel λ est le cube de son unique racine cubique. L'équation $x^3 = \lambda$ a donc **exactement une** solution pour tout λ .

31. $f(x) = 0$ donne $x = 3$; $f(x) = 4$ donne $2x = 10$, soit $x = 5$; $f(x) = -2$ donne $2x = 4$, soit $x = 2$. **Une** solution à chaque fois, car f est affine non constante.

33. Le minimum vaut -2 , atteint en $x = 1$. Pour $\lambda < -2$: **aucune** solution. Pour $\lambda = -2$: **une** solution, $x = 1$. Pour $\lambda > -2$: **deux** solutions, une sur chaque branche de monotonie.

35. $x^2 = 5$ donne $x = -\sqrt{5}$ ou $x = \sqrt{5}$: le nombre 5 a **deux** antécédents par la fonction carré. $x^2 = -5$ n'a aucune solution : le nombre -5 n'a **aucun** antécédent, ce qui prouve que la fonction carré n'est pas surjective vers $\mathbb{R}$.

37. Injectivité : $4a - 8 = 4b - 8$ donne $a = b$. Surjectivité : $y = 4x - 8$ donne $x = \frac{y + 8}{4}$. Donc f est bijective et $f^{-1}(x) = \frac{x + 8}{4}$.

39. $y = 8x + 15$ donne $x = \frac{y - 15}{8}$, d'où $f^{-1}(x) = \frac{x - 15}{8}$. Vérification : $f(1) = 23$ et $f^{-1}(23) = \frac{23 - 15}{8} = 1 \checkmark$

41. $y = \frac{x - 3}{4}$ donne $4y = x - 3$, puis $x = 4y + 3$: $f^{-1}(x) = 4x + 3$. On en déduit $f^{-1}(2) = 4 \times 2 + 3 = 11$.

43. $y = \frac{x + 2}{x - 1}$ donne $y(x - 1) = x + 2$, puis $x(y - 1) = y + 2$ et enfin $x = \frac{y + 2}{y - 1}$ pour $y \neq 1$. Donc $f^{-1}(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$: on remarque que $f^{-1} = f$, l'application est sa propre réciproque (involution).

45. Faux. Sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas injective (2 et -2 ont la même image) ni surjective (-1 n'est pas atteint) : elle n'est pas bijective, donc elle n'admet pas de réciproque.

47. Non, pas nécessairement : pour $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est sa propre réciproque, les deux courbes sont confondues et se rencontrent donc aussi hors de la droite $y = x$. En revanche, tout point commun situé **sur** la droite $y = x$ correspond à une solution de $f(x) = x$. Pour $f(x) = 2x - 1$, on a $f^{-1}(x) = \frac{x + 1}{2}$; l'équation $2x - 1 = \frac{x + 1}{2}$ donne $4x - 2 = x + 1$, soit $x = 1$: l'unique point commun est $(1 ; 1)$, qui est bien sur la droite $y = x$, et c'est aussi la solution de $f(x) = x$.

49. $y = \frac{5}{x}$ donne $xy = 5$, puis $x = \frac{5}{y}$ pour $y \neq 0$: $f^{-1}(x) = \frac{5}{x}$. On remarque que $f^{-1} = f$: cette application est, elle aussi, sa propre réciproque.

51. f est affine, $f(x) = ax + b$. De $f(2) - f(1) = a$ on tire $a = 5 - 3 = 2$, puis $b = f(1) - a = 3 - 2 = 1$: $f(x) = 2x + 1$. Comme $a = 2 \neq 0$, f est bijective et $f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{2}$.

- 53.** $(f \circ g)(x) = f(x^2) = x^2 - 3$, définie sur $\mathbb{R}$. $(g \circ f)(x) = g(x - 3) = (x - 3)^2$, également définie sur $\mathbb{R}$. Les deux composées sont différentes.
- 55.** $(h \circ g \circ f)(x) = h((2x - 1)^2) = (2x - 1)^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 4$.
 $(g \circ h \circ f)(x) = g(2x - 1 + 3) = g(2x + 2) = (2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 4$.
- 57. a)** $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$, donc $h = g \circ f$. **b)** $f(x) = 2x + 5$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, donc $p = g \circ f$. **c)** $f(x) = x - 1$ et $g(x) = x^2$, donc $q = g \circ f$.
- 59.** $(g \circ f)(5) = g(2) = 4$; $(f \circ g)(5) = f(25) = 22$. Les deux résultats diffèrent, ce qui confirme que l'ordre compte.
- 61.** $r = g \circ f$ avec $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$. La composée est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, car $x^2 + 1$ est toujours positif.
- 63.** $(g \circ f)(x) = x^2 + 4$; $(f \circ g)(x) = (x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$.
- 65.** $(g \circ f)(x) = g(x + a) = x + a + b$ et $(f \circ g)(x) = f(x + b) = x + b + a$. L'addition étant commutative, les deux expressions sont égales : $g \circ f = f \circ g$.
- 67.** $(f \circ f)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x$. La composée est l'application identité, donc f est sa propre réciproque.
- 69. 1)** $f(x) - 1 = \frac{x^2 + 1 - (2x^2 + 1)}{2x^2 + 1} = \frac{-x^2}{2x^2 + 1} \leq 0$, donc $f(x) \leq 1$, avec égalité pour $x = 0$. Et
 $f(x) - \frac{1}{2} = \frac{2(x^2 + 1) - (2x^2 + 1)}{2(2x^2 + 1)} = \frac{1}{2(2x^2 + 1)} > 0$, donc $f(x) > \frac{1}{2}$. D'où $\frac{1}{2} < f(x) \leq 1$. **2)** Non : g est affine non constante, ses valeurs deviennent aussi grandes et aussi petites que l'on veut. **3)**
 $(g \circ f)(x) = 3f(x) - 2$; de $\frac{1}{2} < f(x) \leq 1$ on tire $\frac{3}{2} < 3f(x) \leq 3$, donc $-\frac{1}{2} < (g \circ f)(x) \leq 1$: la composée est **bornée**.
- 71.** Posons $u = f^{-1} \circ g^{-1}$. Pour tout x de E , $u((g \circ f)(x)) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x$, et de même $(g \circ f)(u(y)) = y$ pour tout y . Les deux composées étant les identités, $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- 73.** Injectivité : $ax_1 + b = ax_2 + b$ donne $a(x_1 - x_2) = 0$, et comme $a \neq 0$, $x_1 = x_2$. Surjectivité : $y = ax + b$ donne $x = \frac{y - b}{a}$, qui existe pour tout y puisque $a \neq 0$. Donc f est bijective et
 $f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$.
- 75.** Comme f est bijective, f^{-1} existe. En composant l'égalité $f \circ f = f$ à gauche par f^{-1} , on obtient $f^{-1} \circ (f \circ f) = f^{-1} \circ f$, c'est-à-dire $f = \text{Id}_E$.
- 77. 1)** $f(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$. **2)** Sur $\mathbb{R}$: non, car $f(0) = 0 = f(2)$ avec $0 \neq 2$. Sur $[1; +\infty[$: oui, car si $a \geq 1$ et $b \geq 1$ vérifient $(a - 1)^2 = (b - 1)^2$ avec $a - 1 \geq 0$ et $b - 1 \geq 0$, alors $a - 1 = b - 1$, donc $a = b$.
- 79.** $(g \circ f)(x) = 2(x^2 + 1) - 3 = 2x^2 - 1$; $(f \circ g)(x) = (2x - 3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10$.
- 81.** $u = g \circ f$ avec $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = \sqrt{x}$, définie pour $x \geq -\frac{3}{2}$. $v = g \circ f$ avec $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2 + 1$ ne s'annule jamais.

83. $y = \frac{x-1}{x+1}$ donne $y(x+1) = x-1$, puis $xy - x = -1 - y$, soit $x(y-1) = -(1+y)$ et enfin $x = \frac{1+y}{1-y}$ pour $y \neq 1$. Donc $f^{-1}(x) = \frac{1+x}{1-x}$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Contrôle : $f(0) = -1$ et $f^{-1}(-1) = \frac{0}{2} = 0 \checkmark$

85. $(g \circ f)(x) = g(x+1) = 2(x+1) - 1 = 2x+1$. L'équation $2x+1 = 5$ donne $x = 2$.

87. $(f \circ f)(x) = \frac{1}{1/x} = x$ pour tout $x \neq 0$: la composée est l'identité, donc $f^{-1} = f$.

89. $f(0) = 2$ donne $b = 2$; $f(3) = 8$ donne $3a + 2 = 8$, soit $a = 2$. Ainsi $f(x) = 2x + 2$. Comme $a = 2 \neq 0$, f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, et $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{2}$.

91. $(f \circ g)(x) = f(2x) = 3 - 2x$ et $(g \circ f)(x) = g(3-x) = 6 - 2x$. L'équation $3 - 2x = 6 - 2x$ conduit à $3 = 6$, ce qui est impossible : elle n'a **aucune** solution, les deux composées ne coïncident jamais.

93. $(g \circ f)(x) = |x| - 2$ et $(f \circ g)(x) = |x - 2|$. Elles ne sont pas égales : pour $x = 0$, la première vaut -2 et la seconde 2 .

95. $f(x) = \frac{4x-1}{2}$, donc $y = \frac{4x-1}{2}$ donne $2y = 4x - 1$, puis $x = \frac{2y+1}{4}$: $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{4}$.
L'équation $\frac{4x-1}{2} = \frac{2x+1}{4}$ donne $2(4x-1) = 2x+1$, soit $8x-2 = 2x+1$, puis $6x = 3$ et $x = \frac{1}{2}$.
Contrôle : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, le point commun est sur la droite $y = x$.

97. 1) Injectivité : $2x_1 + 5 = 2x_2 + 5$ donne $x_1 = x_2$. Surjectivité : $y = 2x + 5$ donne $x = \frac{y-5}{2}$. Le codage est donc bijectif, ce qui garantit que chaque code correspond à un numéro et un seul : il est décodable. **2)** $c^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$, d'où $c^{-1}(27) = \frac{22}{2} = 11$.

99. 1) $(g \circ f)(x) = 0,9x - 500$: on applique d'abord la remise de 10%, puis la réduction fixe. **2)** $(f \circ g)(x) = 0,9(x - 500) = 0,9x - 450$. Pour $x = 5000$: $(g \circ f)(5000) = 4500 - 500 = 4000$ FCFA, tandis que $(f \circ g)(5000) = 4500 - 450 = 4050$ FCFA. L'ordre $g \circ f$ est donc plus avantageux pour le client, de 50 FCFA.

101. 1) p est injective, donc l'équation $p(x) = \lambda$ a **au plus une** solution : à un montant donné ne peut correspondre qu'un seul nombre de sacs. **2)** $12000x = 30000$ donne $x = 2,5$: ce n'est pas un nombre entier de sacs, donc 30000 FCFA ne correspond à aucun achat entier.

103. C'est faux : seule une **bijection** admet une réciproque. Il faut à la fois l'unicité de l'antécédent, sans quoi la correspondance inverse donnerait deux résultats, et son existence, sans quoi elle n'en donnerait aucun. Exemple : $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ n'a pas de réciproque, puisque 4 a deux antécédents (-2 et 2) et que -1 n'en a aucun.

105. Dans l'écriture $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, c'est bien f qui touche directement le nombre x : elle agit donc en premier, et g traite ensuite le résultat obtenu. La notation place g à gauche parce qu'elle suit l'ordre de lecture de la formule $g(f(x))$, de l'extérieur vers l'intérieur, et non l'ordre chronologique des calculs. L'ordre change en général le résultat, car les deux opérations ne portent pas sur le même nombre : avec $f(x) = x - 3$ et $g(x) = x^2$, on obtient $(x - 3)^2$ dans un sens et $x^2 - 3$ dans l'autre, soit 4 et 22 pour $x = 5$.

Corrigés des situations d'intégration (corrigés-types)

Situation 1 (Kokologho). Une plaque est déterminée par le choix d'une lettre parmi trois et d'un nombre parmi soixante : le lot compte donc $3 \times 60 = 180$ plaques. Attribuer les plaques, c'est associer à chaque coureur une plaque et une seule ; exiger que deux coureurs ne portent jamais la même plaque, c'est exiger que cette attribution soit injective. Or une attribution injective entre deux ensembles finis n'est possible que si l'ensemble de départ n'a pas plus d'éléments que l'ensemble d'arrivée. Ici $176 \leq 180$: la condition est remplie et **le lot suffit, chaque coureur pouvant recevoir une plaque qui n'appartienne qu'à lui**. En revanche, $180 - 176 = 4$ plaques ne seront données à personne : l'attribution n'est pas surjective, et quatre plaques resteront en réserve. Le président doit aussi savoir qu'au-delà de 180 inscrits, aucune attribution ne conviendrait plus. Le droit d'inscription, la longueur du parcours et le nombre de communes représentées sont des données parasites.

Situation 2 (Komsilga). Pour x caisses livrées, le collecteur verse $3\,500x$ FCFA diminués du forfait de 4 000 FCFA, soit $f(x) = 3\,500x - 4\,000$. Cette application est affine de coefficient 3 500, qui n'est pas nul : si $3\,500a - 4\,000 = 3\,500b - 4\,000$, alors $a = b$. Elle est donc injective, et un montant versé ne peut correspondre qu'à un seul nombre de caisses : le carnet est vérifiable sans ambiguïté. On remonte du montant au nombre de caisses en défaisant les opérations dans l'ordre inverse : $f^{-1}(y) = \frac{y + 4\,000}{3\,500}$. Pour $y = 66\,000$, on obtient $\frac{70\,000}{3\,500} = 20$ caisses. Le contrôle confirme la lecture : 22 caisses auraient donné $3\,500 \times 22 - 4\,000 = 73\,000$ FCFA, soit 7 000 FCFA de plus que la somme réellement versée. **La trésorière ne doit pas valider l'écriture** : le carnet doit porter 20 caisses. Le poids d'une caisse et la superficie du champ sont des données parasites.

Situation 3 (Tanghin-Dassouri). Pour x planches irriguées, la campagne coûte $60\,000 + 1\,500x$ FCFA, et le coût par planche est $c(x) = \frac{60\,000 + 1\,500x}{x} = 1\,500 + \frac{60\,000}{x}$. La première moitié de la phrase est exacte : quand x augmente, $\frac{60\,000}{x}$ diminue, donc le coût par planche baisse ; on passe de 3 000 FCFA pour 40 planches à 2 100 FCFA pour 100 planches. La seconde moitié, elle, est fautive. Cherchons en effet à quel nombre de planches correspondrait un coût λ : l'équation $c(x) = \lambda$ donne $\frac{60\,000}{x} = \lambda - 1\,500$, puis $x = \frac{60\,000}{\lambda - 1\,500}$, qui n'a de sens que pour $\lambda > 1\,500$. Aucun coût inférieur ou égal à 1 500 FCFA n'est donc atteint, puisque $\frac{60\,000}{x}$ reste strictement positif. **Le président ne doit pas faire tirer l'affiche** telle quelle. Le nombre d'adhérents, la superficie de la parcelle et la durée de la campagne sont des données parasites.

Situation 4 (Zitenga). Le prix du sac se lit comme une fonction du mois : elle décroît strictement de novembre à février, où elle atteint son minimum de 12 000 FCFA, puis croît strictement de février à août. Dater la fiche, c'est chercher les antécédents de 15 000, autrement dit résoudre l'équation « prix = 15 000 ». Sur la période de baisse, le prix descend de 17 500 à 12 000 FCFA en restant strictement décroissant : il prend une fois, et une seule, la valeur 15 000. Sur la période de hausse, il monte de 12 000 à 22 000 FCFA et reprend cette valeur une fois. L'équation a donc deux solutions : deux mois différents conviennent, et **le gérant ne peut pas dater la fiche** à partir du seul prix. Il le pourrait si le prix noté était strictement supérieur à 17 500 FCFA, et il saurait la fiche fautive si le prix était inférieur à 12 000 FCFA. Le nombre de sacs stockés et l'effectif des magasiniers sont des données parasites.

Situation 5 (Bazèga). Appelons x le prix affiché. La remise transforme x en $0,9x$ et le bon transforme un prix en ce prix diminué de 1 500 FCFA. En appliquant la remise puis le bon, on obtient $0,9x - 1\,500$; dans l'ordre inverse, on obtient $0,9(x - 1\,500) = 0,9x - 1\,350$. Les deux ordres ne donnent donc pas le même prix, et le premier est toujours inférieur de 150 FCFA au second, quel que soit le prix affiché : dans l'ordre inverse, la remise ampute aussi le bon de 10%.

Pour la tôle affichée à 12 000 FCFA :
 $0,9 \times 12\,000 = 10\,800$, puis $10\,800 - 1\,500 = 9\,300$ FCFA d'un côté ; $12\,000 - 1\,500 = 10\,500$, puis $0,9 \times 10\,500 = 9\,450$ FCFA de l'autre. **La caissière doit appliquer d'abord la remise, puis le bon**, ce qui fait gagner 150 FCFA au client, sur cette vente comme sur toutes les autres. L'heure d'ouverture, le nombre de clients servis et la longueur de la tôle sont des données parasites.

Situation 6 (Sourgou). La graduation monte régulièrement avec la température : elle est donc de la forme

$g(t) = at + b$. Les deux repères donnent $a = \frac{115 - 75}{50 - 30} = \frac{40}{20} = 2$, puis $b = 75 - 2 \times 30 = 15$, d'où

$g(t) = 2t + 15$. Le coefficient 2 n'étant pas nul, g est bijective et l'on peut remonter de la graduation à la température : $y = 2t + 15$ donne $t = \frac{y - 15}{2}$, soit $g^{-1}(y) = \frac{y - 15}{2}$. Pour l'aiguille sur 131 :

$\frac{131 - 15}{2} = \frac{116}{2} = 58$ degrés, et l'on contrôle que $g(58) = 2 \times 58 + 15 = 131$. La limite de 60 degrés correspond quant à elle à la graduation $g(60) = 2 \times 60 + 15 = 135$. L'aiguille est donc encore au-dessous du repère dangereux : **le technicien n'a pas à ouvrir les aérations**, mais il doit surveiller le cadran, car quatre graduations seulement l'en séparent. Le nombre de claies et le prix du séchoir sont des données parasites.

Grille de correction APC

Le barème, identique pour les six situations. Chacun des trois critères minimaux vaut 3 points et compte 6 indicateurs observables ; le critère de perfectionnement vaut 1 point et en compte 3. Conversion : 0 à 1 indicateur validé → **0 pt** ; 2 à 3 → **1 pt** (partiel) ; 4 à 5 → **2 pts** (maîtrisé) ; 6 → **3 pts**. L'élève est déclaré **compétent** si aucun critère minimal n'est à 0 et si un seul au plus est au niveau partiel. S'il est compétent, on ajoute le critère de perfectionnement (validé si au moins 2 de ses 3 indicateurs le sont) et un **bonus de 1 point** ; sinon, ni perfectionnement ni bonus. La note est plafonnée à 10, puis multipliée par 2 pour le bulletin.

CP — Perfectionnement (les six situations). La production est claire, bien organisée et grammaticalement correcte ; la démarche est concise, sans calcul inutile ; la conclusion est mise en évidence et soigneusement présentée.

Situation 1 — Les plaques de la course de Kokologho

- **C1 Pertinence** : a compris que chaque coureur doit recevoir une plaque et une seule ; a vu que le nombre de plaques n'est pas donné mais se construit à partir des lettres et des nombres ; a reconnu dans l'exigence du président une condition d'injectivité ; a choisi de comparer deux effectifs plutôt que de chercher un calcul de prix ; a rattaché la question des plaques restantes au fait que toutes les plaques ne sont pas atteintes ; a écarté les données parasites (le droit d'inscription de 1 000 FCFA, les 42 km du parcours et les sept communes représentées).
- **C2 Outils** : a calculé le nombre de plaques $3 \times 60 = 180$; a écrit la comparaison $176 \leq 180$; a énoncé la condition d'existence d'une injection entre deux ensembles finis ; a calculé le nombre de plaques non attribuées $180 - 176 = 4$; a conclu de $4 \neq 0$ que l'attribution n'est pas surjective ; a déterminé le nombre maximal d'inscrits acceptable, soit 180.

- **C3 Cohérence** : enchaîne le dénombrement des plaques, la comparaison des effectifs puis la conclusion sans étape manquante ; distingue dans sa rédaction ce qui se compte en plaques et ce qui se compte en coureurs ; contrôle que le nombre de plaques trouvé est bien de l'ordre de deux centaines ; compare l'effectif des inscrits au seuil de 180 plaques et note que la marge est faible ; formule la décision en une phrase claire adressée au président ; précise le sort des quatre plaques restantes, information dont le président a besoin pour son inventaire.

Situation 2 — Le carnet du collecteur de Komsilga

- **C1 Pertinence** : a repéré que le versement se construit à partir d'un prix par caisse et d'un forfait unique ; a compris que le nombre de caisses est l'inconnue et le montant la donnée ; a vu qu'il fallait remonter du montant au nombre de caisses ; a justifié que ce retour est légitime avant de l'effectuer ; a compris que valider l'écriture suppose de confronter le nombre trouvé à celui du carnet ; a écarté les données parasites (le poids d'une caisse et la superficie du champ).
- **C2 Outils** : a écrit le versement sous la forme $f(x) = 3\,500x - 4\,000$; a simplifié l'égalité $3\,500a - 4\,000 = 3\,500b - 4\,000$ jusqu'à $a = b$; a résolu $3\,500x - 4\,000 = y$ et obtenu $x = \frac{y + 4\,000}{3\,500}$; a calculé $\frac{66\,000 + 4\,000}{3\,500} = 20$; a calculé $3\,500 \times 22 - 4\,000 = 73\,000$; a calculé l'écart $73\,000 - 66\,000 = 7\,000$.
- **C3 Cohérence** : enchaîne la construction du versement, le retour au nombre de caisses puis la confrontation au carnet sans rupture ; exprime les montants en francs et le résultat en caisses, sans confondre les deux ; contrôle que 20 caisses est un ordre de grandeur plausible pour une livraison de maraîcher ; compare le nombre obtenu au 22 inscrit sur le carnet et relève l'écart de deux caisses ; formule un refus net de validation, adressé à la trésorière ; indique la correction à porter au carnet, ce qui permet à la trésorière d'agir.

Situation 3 — L'affiche de Tanghin-Dassouri

- **C1 Pertinence** : a distingué le forfait de location, payé une seule fois, du carburant proportionnel au nombre de planches ; a compris que le coût annoncé sur l'affiche est un coût par planche, donc un quotient ; a vu que la phrase de l'affiche contient deux affirmations à examiner séparément ; a choisi d'étudier toutes les valeurs possibles du coût par planche plutôt que quelques cas au hasard ; a compris qu'une seule affirmation fausse suffit à refuser l'affiche ; a écarté les données parasites (les 48 adhérents, les 3 hectares et les quatre mois de campagne).
- **C2 Outils** : a écrit le coût total $60\,000 + 1\,500x$; a écrit le coût par planche $c(x) = \frac{60\,000 + 1\,500x}{x}$; a transformé cette écriture en $1\,500 + \frac{60\,000}{x}$; a calculé $c(40) = 3\,000$; a calculé $c(100) = 2\,100$; a résolu $c(x) = \lambda$ et obtenu $x = \frac{60\,000}{\lambda - 1\,500}$.
- **C3 Cohérence** : enchaîne l'étude du sens de variation puis celle des valeurs atteintes, sans confondre les deux questions ; exprime le résultat en francs par planche et non en francs ; contrôle que les coûts trouvés se comptent en milliers de francs, comme le forfait ; compare les valeurs prises par le coût par planche au seuil de 1 500 FCFA et constate qu'aucune ne l'atteint ; formule un refus motivé, en disant laquelle des deux affirmations est fausse ; propose au président une formulation exacte, ce qui lui permet de faire tirer l'affiche corrigée.

Situation 4 — La fiche non datée de Zitenga

- **C1 Pertinence** : a traduit la suite des relevés en une variation du prix en fonction du mois ; a repéré février comme mois de changement de sens de variation ; a compris que dater la fiche revient à chercher les mois où le prix vaut 15 000 FCFA ; a vu qu'il fallait examiner séparément la période de baisse et la période de hausse ; a admis qu'une réponse puisse consister à établir qu'on ne peut pas conclure ; a écarté les données parasites (les 220 sacs stockés et les deux magasiniers).
- **C2 Outils** : a écrit l'encadrement $12\,000 < 15\,000 < 17\,500$; a dénombré une solution sur la période de baisse ; a écrit l'encadrement $12\,000 < 15\,000 < 22\,000$; a dénombré une solution sur la période de hausse ; a totalisé $1 + 1 = 2$ solutions ; a déterminé les prix à une seule solution, ceux strictement supérieurs à 17 500, et les prix sans solution, ceux inférieurs à 12 000.
- **C3 Cohérence** : enchaîne le découpage en deux périodes, le comptage sur chacune puis l'addition, sans oublier de période ; exprime les prix en francs et les réponses en mois ; contrôle que les deux mois trouvés encadrent bien février ; compare le prix de la fiche aux deux valeurs charnières 12 000 et 17 500 FCFA ; formule clairement l'impossibilité de dater la fiche, sans la faire passer pour une erreur de calcul ; indique au gérant à quelle condition sur le prix la datation serait possible, ce qui l'aide à trier ses autres fiches.

Situation 5 — Les deux avantages du Bazèga

- **C1 Pertinence** : a identifié deux transformations distinctes du prix, une remise proportionnelle et une réduction fixe ; a compris que l'ordre d'application est la véritable inconnue ; a choisi de traiter le problème pour un prix quelconque avant de l'appliquer au prix affiché ; a vu qu'il fallait comparer deux résultats et non en calculer un seul ; a compris que la réponse attendue doit valoir pour tous les clients ; a écarté les données parasites (l'heure d'ouverture, les trois clients déjà servis et la longueur de la tôle).
- **C2 Outils** : a écrit la remise sous la forme $x \mapsto 0,9x$; a écrit le bon sous la forme $x \mapsto x - 1\,500$; a obtenu $0,9x - 1\,500$ pour la remise appliquée en premier ; a obtenu $0,9(x - 1\,500) = 0,9x - 1\,350$ pour l'ordre inverse ; a calculé les deux prix pour $x = 12\,000$, soit 9 300 et 9 450 ; a calculé l'écart $9\,450 - 9\,300 = 150$.
- **C3 Cohérence** : enchaîne le calcul général puis l'application numérique, la conclusion ne reposant pas sur le seul exemple ; exprime tous les montants en francs entiers ; contrôle que les deux prix finaux sont inférieurs au prix affiché et voisins l'un de l'autre ; compare les deux ordres et désigne celui qui est le plus avantageux pour le client ; formule un conseil unique, applicable à toute vente de la foire ; signale que l'écart de 150 FCFA ne dépend pas du prix, ce qui dispense la caissière de refaire le calcul à chaque client.

Situation 6 — Le séchoir de Sourgou

- **C1 Pertinence** : a compris que graduation et température sont liées par une relation qu'il faut d'abord construire ; a justifié le choix d'une relation affine par la régularité annoncée du cadran ; a vu qu'il fallait passer de la graduation à la température, et non l'inverse ; a contrôlé que la relation construite redonne bien les deux repères relevés ; a compris que la décision se joue par rapport à la limite de 60 degrés ; a écarté les données parasites (les 14 claies et le prix du séchoir).

- **C2 Outils** : a calculé le coefficient $\frac{115 - 75}{50 - 30} = 2$; a calculé $b = 75 - 2 \times 30 = 15$; a écrit $g(t) = 2t + 15$; a résolu $y = 2t + 15$ et obtenu $t = \frac{y - 15}{2}$; a calculé $\frac{131 - 15}{2} = 58$; a calculé la graduation du seuil, $2 \times 60 + 15 = 135$.
- **C3 Cohérence** : enchaîne la construction de la relation, sa vérification puis le retour à la température, sans inverser les rôles des deux échelles ; exprime la température en degrés et la lecture du cadran sans unité ; contrôle que 58 degrés est un ordre de grandeur plausible dans un séchoir solaire ; compare 58 degrés à la limite de 60 degrés, ou la graduation 131 à la graduation 135 ; formule une réponse nette au technicien ; ajoute que la marge est faible, ce qui invite le technicien à surveiller le cadran.

Fin du Chapitre 1 : Les applications : injection, surjection, bijection.